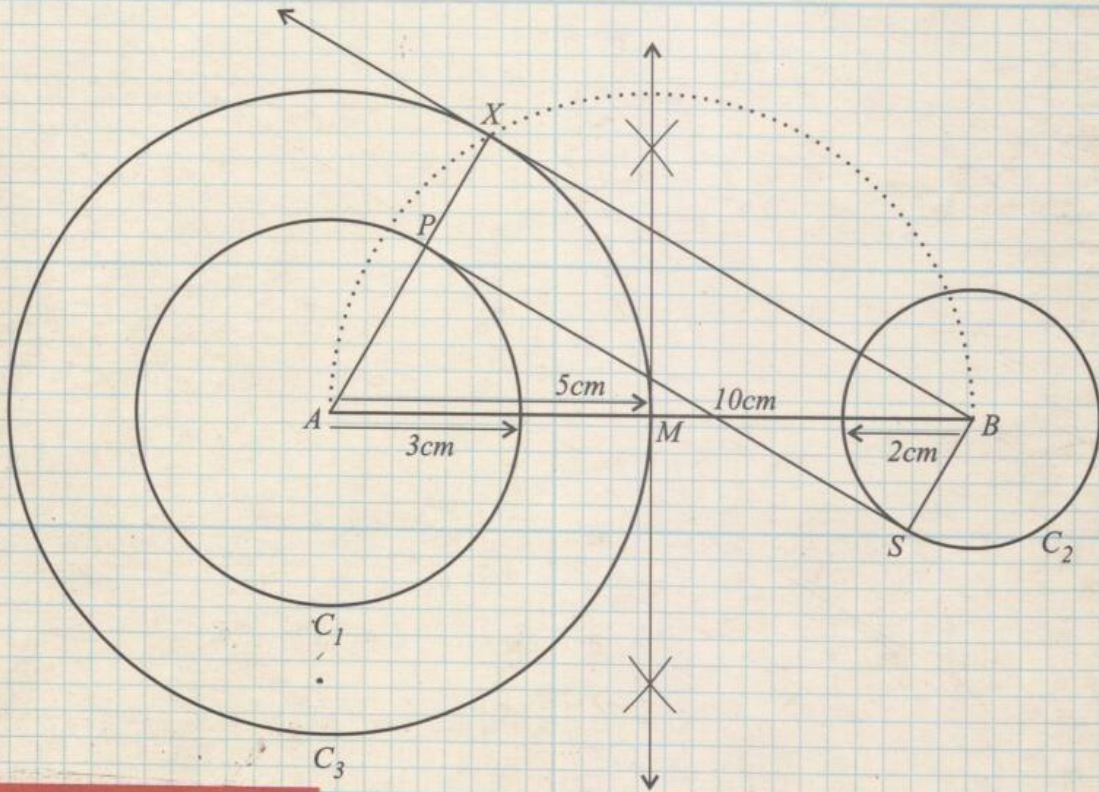


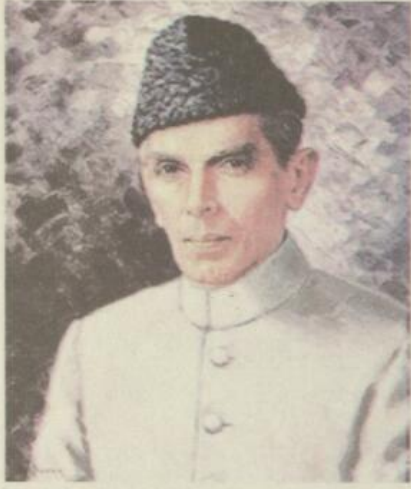
جینرل ریاضی

10

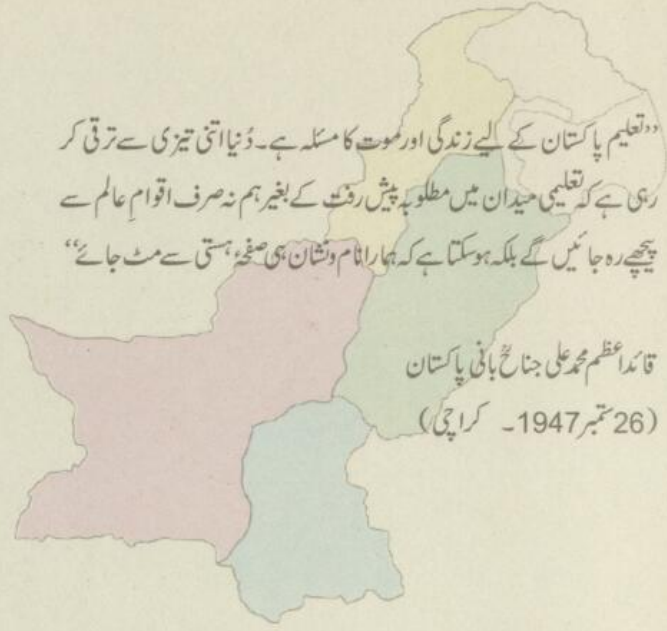


یہ کتاب حکومت پنجاب کی طرف سے
تعلیمی سال 2013-2020 کے لیے پنجاب کے
مرکاری سکولوں میں تقسیم کی گئی جیکٹ میں شامل ہے۔

ناشر: علی - برادران



”تعلیم پاکستان کے لیے زندگی اور موت کا مسئلہ ہے۔ دنیا اتنی تیزی سے ترقی کر رہی ہے کہ تعلیمی میدان میں مطلوبہ پیش رفت کے بغیر ہم نہ صرف اقوام عالم سے پیچھے رہ جائیں گے بلکہ ہو سکتا ہے کہ ہمارا نام و نشان ہی صفحہ ہستی سے مٹ جائے“



قائد اعظم محمد علی جناح بانی پاکستان
(26 ستمبر 1947 - کراچی)

جنرل ریاضی کا مضمون خاص طور پر ان طلباء کے لیے تیار کیا گیا ہے جنہوں نے اوپر کی جماعتوں میں ریاضی اور سائنس کا خصوصی مطالعہ کرنے کی بجائے سوشل سائنس کا مطالعہ کرنا ہوتا ہے۔ جنرل ریاضی کا نصاب خاص طور پر آرٹس گروپ اور علوم شریعہ کے طالب علموں کو مد نظر رکھ کر تیار کیا گیا ہے تاکہ وہ عملی زندگی میں حساب کتاب میں مہارت حاصل کر لیں۔ جنرل ریاضی کے نصاب میں کاروباری ریاضی، مالیاتی ریاضی، صارفین کی ریاضی اور بنیادی شماریات جیسے مضامین شامل کیے گئے ہیں۔ اس نئے نصاب کے پرانے نصاب کے مقابلے میں بہت کم وقت دینا پڑے گا اور اس سے جو وقت بچے گا وہ دوسرے مضامین کے مطالعہ میں صرف ہو سکے گا۔

مصنفین اور مدیران نے اس کتاب کی تیاری میں بہت محنت کی ہے اور اسے قومی نصاب ۲۰۰۶ء کے مطابق تیار کیا ہے۔ معلمین، طلبہ اور ان کے والدین سے درخواست ہے کہ اس کتاب (جنرل ریاضی) کا گہرا تنقیدی مطالعہ کریں اور اغلاط اور خامیوں سے مطلع کریں۔ ان کا یہ اقدام یقیناً بہت بڑا قومی خدمت ہوگا۔

ناشر
محبوب علی عاصم

اس کتاب کو پنجاب کریکولم اینڈ ٹیکسٹ بک بورڈ لاہور نے ناشر سے پرنٹ لائسنس حاصل کر کے سرکاری سکولوں میں مفت تقسیم کے لیے بھی طبع کیا ہے۔
ناشر کی تحریری اجازت کے بغیر اس کتاب کا کوئی حصہ کسی امدادی کتاب، خلاصہ، ماڈل پیپر یا گائیڈ وغیرہ میں شامل نہیں کیا جاسکتا۔

جینرل ریاضی

10



ہاشم علی - برادران

پنجاب پلازہ مچھلی منڈی اردو بازار لاہور

فون: 042-37242233 فیکس: 042-37361207

ویب سائٹ www.alibrotheran.com ای میل info@alibrotheran.com

جملہ حقوق بحق ناشر علی برادران لاہور محفوظ ہیں۔
برطانیق قومی نصاب 2006ء اور نیشنل ٹیکسٹ بک اینڈ لرننگ میٹریلز پالیسی 2007ء
منظور کردہ: پنجاب کریکولم اتھارٹی (پنجاب) لاہور
بذریعہ مراسلہ نمبر PCA-12/19 تاریخ 27 نومبر 2012

ممبران ریو کیٹی

فہرست

صفحہ نمبر	عنوانات	پہنٹ نمبر
1	الجبری کلیے اور ان کے اطلاق	1
35	تجزی	2
57	الجبری حسابات	3
85	یک درجی مساوات اور غیر مساوات	4
107	دو درجی مساوات	5
127	قالب اور مقطع	6
175	جیومیٹری کے بنیادی تصورات	7
221	عملی جیومیٹری	8
247	رقبہ اور حجم	9
275	محداتی جیومیٹری کا تعارف	10
289	جوابات	
301	فرہنگ	
306	علامات	
307	انڈیکس	

ڈاکٹر طارق محمود ڈی۔ای۔اے۔ کریکولم اینڈ ٹیکسٹ بک ونگ
(وزارت کینٹیل ڈیولپمنٹ اتھارٹی۔ اسلام آباد)
پروفیسر ڈاکٹر ایم۔اسلم شعبہ ریاضی (قائد اعظم یونیورسٹی اسلام آباد)
پروفیسر ڈاکٹر شاہد مبین شعبہ ریاضی (سرگودھا یونیورسٹی سرگودھا)
منور دین اعوان اے۔ای۔اے۔(ر) کریکولم ونگ
(وفاقی وزارت تعلیم (ڈی فلٹ) اسلام آباد)
پروفیسر ڈاکٹر ایم۔اسلم ملک شعبہ ریاضی
(پنجاب یونیورسٹی، قائد اعظم کیمپس لاہور)
ڈاکٹر بشری سینئر ہیڈ مسٹر یس
(گورنمنٹ مسلم ماڈل گرلز ہائی سکول، گوجرانوالہ)
فہیم حسین سینئر ماہر مضمون (پنجاب کریکولم اینڈ ٹیکسٹ بک بورڈ لاہور)
افضال حسین ڈیک آفیسر (پنجاب کریکولم اتھارٹی لاہور)

مقصود رضا احمد (ایم ایس ی، ایم فل)

ڈاکٹر محمد عذیر احمد (پی۔ایچ۔ڈی)

محمد اقبال باقر (ایم ایس ی)

جاوید اقبال (ایم ایس ی)

جاوید اقبال (ایم ایس ی)

کمپوزنگ اینڈ ڈیزائننگ: کاشف لطیف۔ محمد طاہر

محبوب علی عاصم

علی برادران پبلشرز اینڈ پرنٹرز لاہور

علی برادران پنجاب پلازہ اردو بازار لاہور

تاریخ اشاعت	ایڈیشن	بار	تعداد	قیمت
مارچ 2019ء	پنجم	اول	25000	147.00

ALGEBRAIC FORMULAS AND APPLICATIONS

الجبری کلیے اور ان کا اطلاق

◀ الجبری جملے ▶ الجبری کلیے ▶ مقادیر اضم اور ان کا اطلاق ▶ ناطق بنانا

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

- ◀ ایک ناطق جملہ، ناطق عدد ہوتا ہے۔
- ◀ ایک ناطق جملہ دو کثیر درجی جملوں $p(x)$ اور $q(x)$ کا حاصل قسمت $\frac{p(x)}{q(x)}$ کی صورت میں ظاہر جبکہ $q(x)$ غیر صفر کثیر درجی ہوتا ہے۔
- ◀ یہ مشاہدہ کر لیں کہ دیا گیا الجبری جملہ ایک • کثیر درجی جملہ ہے یا نہیں • ناطق جملہ ہے یا نہیں
- ◀ $\frac{p(x)}{q(x)}$ کو ایک مختصر ترین درجہ والی رقوم میں لکھ سکیں۔ جبکہ $p(x)$ اور $q(x)$ جملوں کے عددی سر صحت اعداد ہوں اور کوئی مشترک جزو ضربی نہ ہوں۔
- ◀ مشاہدہ کر سکیں کہ دیا گیا ناطق جملہ اپنی مختصر ترین شکل میں ہے یا نہیں۔
- ◀ دیے گئے ناطق جملہ کو مختصر ترین رقوم میں ظاہر کرنا۔
- ◀ ایک ناطق جملہ کو دوسرے ناطق جملہ سے تقسیم کرنا اور حاصل شدہ رقوم کو مختصر ترین صورت میں لکھنا۔
- ◀ الجبری جملہ کی کسی خاص حقیقی عدد کے لیے قیمت معلوم کر سکیں۔
- ◀ کلیے $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$ ، $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$ جان سکیں۔
- ◀ $(a-b)$ ، $(a+b)$ کی قیمتیں معلوم ہوں تو $a^2 + b^2$ اور ab کی قیمت معلوم کر سکیں۔
- ◀ کلیے $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ کو جان سکیں
- ◀ $a^2 + b^2 + c^2$ کی قیمت معلوم کر سکیں جبکہ $a+b+c$ اور $ab+bc+ca$ کی قیمتیں دی گئی ہوں۔
- ◀ $a+b+c$ کی قیمت معلوم کر سکیں جبکہ $a^2 + b^2 + c^2$ اور $ab+bc+ca$ کی قیمتیں دی گئی ہوں۔
- ◀ کلیے $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3ab(a \pm b) \pm b^3$ ، $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$ حاصل کر سکیں۔
- ◀ $a^3 \pm b^3$ کی قیمتیں معلوم کر سکیں $a \pm b$ اور ab دیے گئے ہوں۔ • تسلسل حاصل ضرب $(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$ اور $(x+y)(x-y)$ معلوم کر سکیں۔
- ◀ مقادیر اضم کی پہچان اور ان کا
- ◀ دوسرے درجہ کی مقادیر اضم کی وضاحت کرنا۔ دوسرے درجہ کی مقادیر اضم پر بنیادی عوامل استعمال کرتے ہوئے ان کے مخارج کو ناطق بنانا اور قیمت معلوم کر سکیں۔
- ◀ کی طرح کے حقیقی اعداد سے ناطق بنانے کی وضاحت کر سکیں۔ جبکہ 'x' اور 'y' قدرتی اعداد
- ◀ اور 'a'، 'b' صحیح اعداد ہوں۔

1.1 الجبری جملے: ALGEBRAIC EXPRESSIONS

الجبرا حساب کی توسیع ہے الجبرا میں a, b, c جیسے حروف تہجی مستقل مقداروں کو ظاہر کرتے ہیں اور x, y, z کو ہم قابل انتخاب عددی قیمت کیلئے استعمال کرتے ہیں۔

الجبری جملے میں اعداد اور حروف تہجی عوامل کی علامتوں $+, -, \times, \div$ کے ساتھ استعمال ہوتے ہیں جبکہ علامات $+$ اور $-$ الجبری جملے کی رقوم (Terms) کو جدا کرتی ہیں۔

مثال:

2 رقوم (Terms) پر مشتمل ہے	$ax + by$
2 رقوم (Terms) پر مشتمل ہے	$3x - 2y$
3 رقوم (Terms) پر مشتمل ہے	$9x^2 - 7xy + 7y^2$
1 رقم (Term) پر مشتمل ہے	$5xy$

درج بالا میں اعداد $a, b, 3, 2, 9, 7, 5$ ان جملوں میں عددی سرکہلاتے ہیں جبکہ x, y متغیرات کہلاتے ہیں۔ ایک الجبری جملہ تین طرح کا ہوتا ہے۔

(i) کثیر رقی Polynomial (ii) ناطق جملہ Rational (iii) غیر ناطق جملہ Irrational

x متغیر میں 'n' درجہ کی کثیر رقی یوں لکھی جاتی ہے۔

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

جبکہ 'n' ایک غیر منفی عدد ہے اور $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_3, a_2, a_1, a_0$ حقیقی اعداد ہیں۔ جبکہ $a_n \neq 0$ چونکہ متغیر 'x' کا سب سے بڑا قوت نما 'n' ہے لہذا اس کثیر رقی کا درجہ 'n' ہے۔

1.1.1 ناطق جملے: Rational Expressions

ہم جانتے ہیں کہ $\frac{p}{q}$ کی طرز کا عدد جس میں $(p, q \in \mathbb{Z} \text{ اور } q \neq 0)$ ناطق عدد کہلاتا ہے۔

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ کی طرز میں لکھا گیا ایک جملہ (جس میں $Q(x) \neq 0$ جبکہ $P(x)$ اور $Q(x)$ متغیر x میں کثیر رقمیاں ہیں) ایک ناطق جملہ کہلاتا ہے۔

مثال:

$$(i) \frac{x^2 + 1}{x^3 + x^2 + 3} \quad (ii) \frac{x^3 + 8}{x + 1} \quad (iii) \frac{2x^2 + 3x + 3}{x^2 + x + 2} \quad (iv) \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 3}$$

ناطق جملہ کہلاتے ہیں۔ ناطق جملے، ناطق اعداد کی طرح جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم کیے جاسکتے ہیں۔

ناطق جملے دو طرح کے ہوتے ہیں۔

(i) واجب ناطق جملے

(ii) غیر واجب ناطق جملے

واجب ناطق جملے: Proper Rational Expressions

ایک ناطق جملہ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ واجب ناطق جملہ کہلاتا ہے اگر $P(x)$ کا درجہ $Q(x)$ (degree) کے درجے سے کم ہو۔

مثال:

$$\text{واجب ناطق جملے ہیں } \frac{x + 1}{x^2 + 3x + 7}, \frac{3x^3 + 4x^2 + 5}{2x^4 + 1}$$

غیر واجب ناطق جملے: Improper Rational Expressions

ایک ناطق جملہ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ جس میں $P(x)$ کا درجہ $Q(x)$ (degree) کے درجے کے برابر یا اس کے درجے سے بڑا ہو غیر واجب ناطق جملہ کہلاتا ہے۔

مثال:

$$\text{غیر واجب ناطق جملے ہیں } \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 1}, \frac{x^2 + 4x + 9}{x^2 + 1}, \frac{x^3 + 1}{x^2 - x + 4}, \frac{x + 5}{x - 1}$$

1.1.3 - دیے گئے الجبری جملہ کا مشاہدہ Examine a Given Algebraic Expression

درج ذیل جملوں پر غور کیجیے۔

$$(i) 2x^2 + 3x + 9 \quad (ii) x + 5 \quad (iii) \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 1 \quad (iv) \frac{-4}{x^3}$$

(i) اور (ii) کثیر رقمی ہیں لیکن (iii) اور (iv) کثیر رقمی نہیں۔ کیونکہ (iii) اور (iv) متغیرات کے قوت نام صحیح اعداد نہیں ہیں۔

درج ذیل پر بھی غور کیجیے۔

$$(i) \frac{x+1}{x^3+x^2+3} \quad (ii) \frac{x^3+1}{x-1} \quad (iii) \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 1$$

$$(iv) 2\sqrt{y} + \frac{3}{\sqrt{x}} + 1 \quad (v) \frac{\sqrt{y}+3}{x^{2/3}}$$

(i) اور (ii) ناطق جملے ہیں لیکن (iii) اور (iv) اور (v) ناطق جملے نہیں ہیں۔ کیونکہ متغیرات کے قوت نام صحیح اعداد ہیں۔

1.1.4 - ناطق جملے اپنی مختصر ترین شکل میں

Rational Expressions in its Lowest Terms

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A}{B} \text{ اگر } A, B, C \text{ کثیر رقمیاں ہوں جبکہ } B, C \neq 0$$

(جو کہ کسور کا بنیادی قانون کہلاتا ہے)

اس اصول کو ناطق جملوں کو مختصر ترین شکل میں تبدیل کرنے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔

ایک ایسا ناطق جملہ جس کے شمار کنندہ اور مخارج میں '1' اور -1 کے علاوہ کوئی مشترک جزو نہ ہو اپنی مختصر ترین شکل میں کہلاتا ہے۔

یہ جاننے کے لیے کہ کوئی جملہ اپنی مختصر ترین شکل میں ہے یا نہیں، ہم دی گئی مثال پر غور کرتے ہیں۔

مثال :- $\frac{8x^3y^2}{12xy^5}$ کی مختصر ترین شکل معلوم کریں۔

حل :

$$\begin{aligned}\frac{8x^3y^2}{12xy^5} &= \frac{2x^2 \cdot 4xy^2}{3y^3 \cdot 4xy^2} \\ &= \frac{2x^2}{3y^3}\end{aligned}$$

پس کسی بھی ناطق جملے کو مختصر ترین شکل میں تبدیل کرنے کے لیے سب سے پہلے ہم شمار کنندہ اور مخرج کے اجزائے ضربی بناتے ہیں اور اس کے بعد کسروں کے بنیادی اصول کی مدد سے مطلوبہ جملہ حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\frac{b^2 - a^2}{b^3 - a^3} &= \frac{(b - a)(b + a)}{(b - a)(b^2 + ab + a^2)} \\ &= \frac{b + a}{b^2 + ab + a^2}\end{aligned}$$

مثلاً

Reduce a Rational Expression to its Lowest Terms

1.1.5 - ناطق جملوں کا اختصار

مثال :- مختصر ترین شکل میں تبدیل کریں۔

حل :

$$\begin{aligned}(i) \quad \frac{32x^5y^7}{-4x^2y^9} &= -\frac{8x^3 \cdot 4x^2y^7}{y^2 \cdot 4x^2y^7} \\ &= -\frac{8x^3}{y^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(ii) \quad \frac{2-x}{3x^2-5x-2} &= \frac{2-x}{3x^2-6x+x-2} \\ &= \frac{2-x}{3x(x-2)+1(x-2)} \\ &= \frac{2-x}{(3x+1)(x-2)} \\ &= \frac{(-1)(x-2)}{(3x+1)(x-2)} \\ &= \frac{-1}{3x+1}\end{aligned}$$

Sum, Difference and Product of Rational Expressions

1.1.6- ناطق جملوں کی جمع، تفریق اور ضرب

ہم ناطق جملوں کی جمع، تفریق اور ضرب درج ذیل مثالوں سے سیکھتے ہیں۔

مثال 1:-

حل کریں۔

$$(i) \frac{x+1}{x^2-3x+2} + \frac{x+2}{x^2-4x+3}$$

$$(ii) \frac{x+2}{x^3+1} + \frac{x}{x^2-1}$$

$$(i) \frac{x+1}{x^2-3x+2} + \frac{x+2}{x^2-4x+3}$$

حل:

$$= \frac{x+1}{x^2-2x-x+2} + \frac{x+2}{x^2-3x-x+3}$$

$$= \frac{x+1}{x(x-2)-1(x-2)} + \frac{x+2}{x(x-3)-1(x-3)}$$

$$= \frac{x+1}{(x-2)(x-1)} + \frac{x+2}{(x-3)(x-1)}$$

$$= \frac{(x+1)(x-3) + (x+2)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$= \frac{x^2-3x+x-3+x^2-2x+2x-4}{(x^2-2x-x+2)(x-3)}$$

$$= \frac{2x^2-2x-7}{(x^2-3x+2)(x-3)}$$

$$= \frac{2x^2-2x-7}{x^3-6x^2+11x-6}$$

$$\begin{aligned}
 (ii) \quad & \frac{x+2}{x^3+1} + \frac{x}{x^2-1} \\
 &= \frac{x+2}{(x+1)(x^2-x+1)} + \frac{x}{(x-1)(x+1)} \\
 &= \frac{(x+2)(x-1) + x(x^2-x+1)}{(x+1)(x-1)(x^2-x+1)} \\
 &= \frac{x^2+2x-x-2+x^3-x^2+x}{(x^2-1)(x^2-x+1)} \\
 &= \frac{x^3+2x-2}{x^4-x^3+x^2-x^2+x-1} \\
 &= \frac{x^3+2x-2}{x^4-x^3+x-1}
 \end{aligned}$$

مثال 2:-

حل کریں۔

$$(i) \quad \frac{x+3}{x^2-4} - \frac{x-1}{x+2}$$

$$(ii) \quad \frac{x+5}{x^2-6x} - \frac{x}{x-6}$$

$$(i) \quad \frac{x+3}{x^2-4} - \frac{x-1}{x+2}$$

$$= \frac{x+3}{(x-2)(x+2)} - \frac{x-1}{x+2}$$

$$= \frac{(x+3)(1) - (x-1)(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

حل:

$$= \frac{x+3-(x^2-2x-x+2)}{x^2-4}$$

$$= \frac{x+3-x^2+3x-2}{x^2-4}$$

$$= \frac{4x-x^2+1}{x^2-4}$$

$$= \frac{1+4x-x^2}{x^2-4}$$

$$(ii) \frac{x+5}{x^2-6x} - \frac{x}{x-6}$$

$$= \frac{x+5}{x(x-6)} - \frac{x}{x-6}$$

$$= \frac{x+5-x \cdot x}{x(x-6)}$$

$$= \frac{x+5-x^2}{x^2-6x}$$

$$= \frac{5+x-x^2}{x^2-6x}$$

مثال 3:-

مختصر کریں۔

$$(i) \frac{x^2+x}{x^2-x} \times \frac{x-1}{x^3+1}$$

$$(ii) \frac{2x^2}{2x-1} \times \frac{2x-1}{6x+1}$$

$$(i) \frac{x^2+x}{x^2-x} \times \frac{x-1}{x^3+1}$$

$$= \frac{x(x+1)}{x(x-1)} \times \frac{x-1}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

حل:

$$= \frac{x(x+1)(x-1)}{x(x-1)(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$= \frac{1}{x^2-x+1}$$

$$(ii) \frac{2x^2}{2x-1} \times \frac{2x-1}{6x+1}$$

$$= \frac{2x^2(2x-1)}{(2x-1)(6x+1)}$$

$$= \frac{2x^2}{6x+1}$$

1.1.7 - ناطق جملوں کی تقسیم: Division of Rational Expressions

ناطق جملوں کی تقسیم کا طریقہ یہ ہے کہ پہلے جملوں کے شمار کنندہ اور مخرج کے اجزائے ضربی بنائیں۔ پھر ان میں سے مشترک (یکساں) جملے کاٹ دیں۔

مثال :-

مختصر کیجیے۔

$$(i) \frac{x^2-2x}{x+1} \div \frac{x^2-4}{x^2+2x+1}$$

$$(ii) \frac{3x-1}{1+x} \div \frac{1-3x}{x^2+2x+1}$$

$$(i) \frac{x^2-2x}{x+1} \div \frac{x^2-4}{x^2+2x+1}$$

$$= \frac{x(x-2)}{x+1} \div \frac{(x-2)(x+2)}{(x+1)^2}$$

حل:

$$= \frac{x(x-2)}{x+1} \times \frac{(x+1)(x+1)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x(x+1)}{x+2}$$

$$= \frac{x^2+x}{x+2}$$

$$(ii) \frac{3x-1}{1+x} \div \frac{1-3x}{x^2+2x+1}$$

$$= \frac{3x-1}{1+x} \div \frac{1-3x}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{3x-1}{1+x} \times \frac{(x+1)(x+1)}{1-3x}$$

$$= \frac{(3x-1)(x+1)}{(1-3x)}$$

$$= \frac{(3x-1)(x+1)}{-(3x-1)}$$

$$= -(x+1)$$

1.1.8 - الجبری جملے کی قیمت Value of an Algebraic Expression

اگر کسی کثیر رقمی $P(x)$ میں 'x' کی جگہ کوئی حقیقی عدد رکھیں تو ہمیں ایک حقیقی عدد حاصل ہوتا ہے۔ یہ حقیقی عدد، $P(x)$ کی قیمت کہلاتی ہے۔ اگر $a \in R$ ، $x = a$ ہو تو $P(x)$ کی قیمت $P(a)$ ہوگی۔

مثال کے طور پر:

اگر $P(x) = 4x^3 + 3x^2 + 5x + 1$ ہو تو $P(x)$ کی قیمت معلوم کریں۔ اگر $x = 1$ ، (ii) $x = 2$

$$P(x) = 4x^3 + 3x^2 + 5x + 1$$

$$(i) P(1) = 4(1)^3 + 3(1)^2 + 5(1) + 1$$

$$= 4 + 3 + 5 + 1$$

$$= 13$$

$$P(1) = 13$$

$$(ii) P(2) = 4(2)^3 + 3(2)^2 + 5(2) + 1$$

$$= 32 + 12 + 10 + 1 = 55$$

$$P(2) = 55$$

پس

مثال 1:-

اگر $P(x) = 4x^4 + 3x^2 - 5x + 1$ ہو تو $P(-1)$ معلوم کریں۔

حل:

چونکہ $P(x) = 4x^4 + 3x^2 - 5x + 1$

$$P(-1) = 4(-1)^4 + 3(-1)^2 - 5(-1) + 1$$

$$= 4 + 3 + 5 + 1$$

$$= 13$$

مثال 2:-

اگر $P(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 + 8}$ ہو تو $P(1)$ معلوم کریں۔

حل:

$$P(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 + 8}$$

$$P(1) = \frac{1^2 - 5(1) + 6}{1^3 + 8} = \frac{1 - 5 + 6}{1 + 8}$$

$$= \frac{2}{9}$$

مشق 1.1

حل کریں۔

1- اگر $P(x) = x^4 + 3x^2 - 5x + 9$ ہو تو $x = 0$ اور $x = 1$ کے لیے $P(x)$ کی قیمت معلوم کریں۔

2- اگر $P(x) = 2x^3 + 2x^2 + x - 1$ ہو تو $P(-2)$ معلوم کریں۔

3- اگر $P(y) = 3y^2 + \frac{y}{4} + 9$ ہو تو $P(0)$ معلوم کریں۔

4- اگر $P(x) = 9x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ ہو تو $P(1)$ اور $P(2)$ معلوم کریں۔

5- اگر $P(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x + 1}$ ہو تو $P(1)$ اور $P(2)$ معلوم کریں۔

6- اگر $P(r) = 2\pi r$ ہو تو $r = 3$ اور $\pi = \frac{22}{7}$ کے لیے $P(r)$ معلوم کریں۔

7- اگر $P(r) = 4\pi r^2$ ہو تو $r = 8$ اور $\pi = \frac{22}{7}$ کے لیے $P(r)$ معلوم کریں۔

8- اگر $P(y) = y^4 + \frac{3y^3}{2} - y^2 + 1$ ہو تو $y = 2$ اور $y = -2$ کے لیے $P(y)$ معلوم کریں۔

دیے گئے ناطق جملوں کو ان کی مختصر ترین شکل میں تبدیل کیجیے۔

$$9- \frac{8x^2y^2}{12x^4y}$$

$$10- \frac{25a^3b^2}{14a^2b^4}$$

$$11- \frac{16a^6b^7}{12a^3b^5 + 20a^5b^4}$$

$$12- \frac{18m^5x^3}{27m^4x^8 - 36m^6x^6}$$

$$13- \frac{5c - 5d}{c^2 - d^2}$$

$$14- \frac{x^2 - y^2}{3y - 3x}$$

مختصر کیجیے۔

$$15- \frac{x}{x-y} + \frac{x^2}{x^2+y^2}$$

$$16- \frac{x^2+2x}{x^2+x-2} + \frac{3x}{x+1}$$

$$17- \frac{x+2}{x^2+3x+2} - \frac{x-5}{x^2-x-6}$$

$$18- \frac{8x^2+18y^2}{4x^2-9y^2} - \frac{2x+3y}{2x-3y}$$

$$19- \frac{x}{x^2+xy} - \frac{y}{x^2-y^2}$$

$$20- \frac{x+y}{xy+y^2} - \frac{x}{x^2-xy}$$

$$21- \frac{(x+1)^2}{x^2-1} - \frac{x^2+1}{x^2+1}$$

$$22- \frac{5x}{x-9} + \frac{x^2-2x+1}{x^2-12x+27} - \frac{6x}{x-3}$$

$$23- \frac{x^2-4x+4}{x^2-4} \div \frac{x}{x-2}$$

$$24- \frac{x^2-36}{x^2-1} \div \frac{x-6}{1-x}$$

$$25- \frac{x^2-5x}{x-1} \div \frac{x^2-25}{x^2+x+20}$$

$$26- \frac{2x^2-5x-12}{4x^2+4x-3} \div \frac{2x^2-7x-4}{6x^2+5x-4}$$

$$27- \frac{x(2x-1)^2}{2x^2-1} \div \frac{4x^2-1}{4x^2+4x+1}$$

$$28- \frac{x^2+x}{x^2-1} \times \frac{x+1}{x^3+1}$$

$$29- \frac{x^2-9}{x^2-6x+9} \times \frac{x}{3x+9}$$

$$30- \frac{x+5}{x^2+6x} \times \frac{x^3+6x^2}{x+5}$$

$$31- \frac{x^2-2x+1}{x^2-1} \times \frac{x+1}{x-1}$$

$$32- \frac{x^2+4x+3}{x+3} \times \frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$$

1.2 گلیے FORMULAE

ایک کلیہ، الجبری شکل میں ایک قانون کو ظاہر کرتا ہے جبکہ گلیے اس کی جمع ہیں۔

1.2.1 - کلیہ 1

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$$

$$\begin{aligned} \text{L.H.S} &= (a+b)^2 + (a-b)^2 && \text{ثبوت:} \\ &= a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2 \\ &= 2a^2 + 2b^2 \\ &= 2(a^2 + b^2) \\ &= \text{R.H.S} \end{aligned}$$

کلیہ 2

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

$$\begin{aligned} \text{L.H.S} &= (a+b)^2 - (a-b)^2 && \text{ثبوت:} \\ &= (a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 - 2ab + b^2) \\ &= a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2 \\ &= 4ab \\ &= \text{R.H.S} \end{aligned}$$

مثال 1:-

$a^2 + b^2$ کی قیمت معلوم کریں جبکہ $a + b = 8$ اور $ab = 12$

حل:

$$a + b = 8 \quad \text{چونکہ}$$

دونوں اطراف مربع لینے سے

$$(a+b)^2 = (8)^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 64$$

$$a^2 + b^2 = 64 - 2ab$$

$$= 64 - 2(12) \quad \because ab = 12$$

$$= 64 - 24$$

$$a^2 + b^2 = 40$$

علامت "∴" کا مطلب ہے کیونکہ

مثال 2:-

ab کی قیمت معلوم کریں جبکہ $a + b = 9$ اور $a - b = 3$

ہمیں معلوم ہے کہ **حل:**

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$$

$$(9)^2 - (3)^2 = 4ab$$

$$81 - 9 = 4ab$$

$$4ab = 72$$

$$ab = \frac{72}{4}$$

$$ab = 18$$

1.2.2 - کلیہ 3

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

$$p = a + b \quad \text{فرض کیا}$$

$$L.H.S = (a + b + c)^2 = (p + c)^2$$

$$= p^2 + 2pc + c^2$$

$$= (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2 \quad (\text{یہاں } p = a + b)$$

$$= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

$$= R.H.S$$

مثال 3:-

$a^2 + b^2 + c^2$ کی قیمت معلوم کریں جبکہ $a + b + c = 12$ اور $ab + bc + ca = 8$

ہمیں معلوم ہے کہ **حل:**

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

$$(12)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(8)$$

$$144 = a^2 + b^2 + c^2 + 16$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 128$$

مثال 4:-

$a + b + c$ کی قیمت معلوم کیجیے جبکہ $a^2 + b^2 + c^2 = 100$ اور $ab + bc + ca = 22$

حل: ہمیں معلوم ہے کہ

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

$$= (a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + bc + ca)$$

$$= 100 + 2(22)$$

$$= 100 + 44$$

$$(a + b + c)^2 = 144$$

$$(a + b + c)^2 = (12)^2$$

$$a + b + c = \pm 12$$

نتائج
(i) $x^2 = a^2$ $x = \pm a$
(ii) $x^2 = a$ $x = \pm \sqrt{a}$

مثال 5:-

$ab + bc + ca$ کی قیمت معلوم کریں جبکہ $a^2 + b^2 + c^2 = 36$ اور $a + b + c = 8$

حل: ہمیں معلوم ہے کہ

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

$$8^2 = 36 + 2(ab + bc + ca)$$

$$64 - 36 = 2(ab + bc + ca)$$

$$2(ab + bc + ca) = 28$$

$$ab + bc + ca = \frac{28}{2} \quad (\text{دونوں اطراف کو 2 پر تقسیم کرنے سے})$$

$$ab + bc + ca = 14$$



1.2.3 - کلیہ 4

$$(a+b)^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3$$

$$L.H.S = (a+b)^3$$

$$= (a+b)^2 (a+b)$$

$$= (a^2 + 2ab + b^2) (a+b)$$

$$= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + b^2a + b^3$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$= a^3 + 3ab(a+b) + b^3$$

$$= R.H.S$$

کلیہ 5

$$(a-b)^3 = a^3 - 3ab(a-b) - b^3$$

$$L.H.S = (a-b)^3$$

$$= (a-b)^2 (a-b)$$

$$= (a^2 - 2ab + b^2) (a-b)$$

$$= a^3 - a^2b - 2a^2b + 2ab^2 + b^2a - b^3$$

$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \quad (\because ab^2 = b^2a)$$

$$= a^3 - 3ab(a-b) - b^3$$

$$= R.H.S$$

کلیہ 6

$$a^3 + b^3 = (a + b) (a^2 - ab + b^2)$$

$$R.H.S = (a + b) (a^2 - ab + b^2)$$

$$= a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3$$

$$= a^3 + b^3$$

$$= L.H.S$$

کلیہ 7

$$a^3 - b^3 = (a - b) (a^2 + ab + b^2)$$

$$R.H.S = (a - b) (a^2 + ab + b^2)$$

$$= a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3$$

$$= a^3 - b^3$$

$$= L.H.S$$

مثال 6:-

$x^3 + y^3$ کی قیمت معلوم کریں جبکہ $xy = 8$ اور $x + y = 5$

حل:

$$x + y = 5$$

$$(x + y)^3 = (5)^3 \quad (\text{دونوں اطراف کا مکعب لینے سے})$$

$$x^3 + y^3 + 3xy(x + y) = 125$$

$$x^3 + y^3 + 3(8)(5) = 125 \quad (x + y = 5 \text{ اور } xy = 8 \text{ رکھنے سے})$$

$$x^3 + y^3 + 120 = 125$$

$$x^3 + y^3 = 125 - 120$$

$$\therefore x^3 + y^3 = 5$$

مثال 7:-

$a^3 - b^3$ کی قیمت معلوم کریں جبکہ $a - b = 6$ اور $ab = 7$

حل:

$$a - b = 6$$

$$(a - b)^3 = (6)^3 \quad (\text{دونوں اطراف کا مکعب لینے سے})$$

$$a^3 - b^3 - 3ab(a - b) = 216$$

$$a^3 - b^3 - 3(7)(6) = 216$$

$$a^3 - b^3 - 126 = 216$$

$$a^3 - b^3 = 216 + 126$$

$$a^3 - b^3 = 342$$

مثال 8:-

$x^3 p^2 - 8y^3 p^2 - 4x^3 q^2 + 32y^3 q^2$ کے اجزائے ضربی بنائیے۔

حل:

$$x^3 p^2 - 8y^3 p^2 - 4x^3 q^2 + 32y^3 q^2 \quad (\text{رقوم کی ترتیب بدلنے سے})$$

$$= p^2(x^3 - 8y^3) - 4q^2(x^3 - 8y^3)$$

$$= (p^2 - 4q^2)(x^3 - 8y^3)$$

$$= [(p)^2 - (2q)^2][(x)^3 - (2y)^3]$$

$$= (p - 2q)(p + 2q)(x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$$

مثال 9:-

$64x^6 - 729y^6$ کے اجزائے ضربی بنائیے۔

حل:

$$64x^6 - 729y^6 = 2^6 x^6 - 3^6 y^6$$

$$= (2x)^6 - (3y)^6$$

$$= [(2x)^3]^2 - [(3y)^3]^2$$

$$= [(2x)^3 - (3y)^3][(2x)^3 + (3y)^3]$$

$$= (2x - 3y)[4x^2 + 6xy + 9y^2](2x + 3y)[4x^2 - 6xy + 9y^2]$$

علامت "∴" کا مطلب ہے "لہذا"

مثال 10:-

$(x+y)^3 + 64$ کے اجزائے ضربی بنائیے۔

حل:

$$(x+y)^3 + 64$$

$$= (x+y)^3 + (4)^3$$

$$= (x+y+4) [(x+y)^2 - (x+y)4 + (4)^2]$$

$$= (x+y+4) [x^2 + y^2 + 2xy - 4x - 4y + 16]$$

مثال 11:-

$x^6 - y^6$ مسلسل حاصل ضرب معلوم کیجیے۔

حل:

$$x^6 - y^6$$

$$= (x^3)^2 - (y^3)^2$$

$$= (x^3 + y^3) (x^3 - y^3)$$

$$= (x+y) (x^2 - xy + y^2) (x-y) (x^2 + xy + y^2)$$

$$= (x+y) (x-y) (x^2 - xy + y^2) (x^2 + xy + y^2)$$

مشق 1.2

درج ذیل سوالات فارمولوں کی مدد سے حل کریں۔

1. $(x+2y)^2 + (x-2y)^2$

2. $(5x+3y)^2 + (5x-3y)^2$

3. $(3l+2m)^2 - (3l-2m)^2$

4. $(l+m)(l-m)(l^2+m^2)(l^4+m^4)$

$$(2x + 3y + 2)^2 \quad .6$$

$$(ab - \frac{1}{ab})^3 \quad .5$$

$$(3p + q + r)^2 \quad .8$$

$$(2p + q)^3 \quad .7$$

$$(x + y)^3 - 1 \quad .10$$

$$(2x + 3y)^3 \quad .9$$

$$8x^3 + 27y^3 \quad .12$$

$$(x - y)^3 + 64 \quad .11$$

$$64a^6 - b^6 \quad .14$$

$$x^6 - 729y^6 \quad .13$$

$$ab = -5 \text{ اور } a - b = 4 \text{ جبکہ } a^3 - b^3 \text{ کی قیمت معلوم کیجیے۔} \quad .15$$

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - \left(z - \frac{1}{z}\right)^2 = 4 \text{ ثابت کیجیے۔} \quad .16$$

$$a - b = 3 \text{ اور } a + b = 5 \text{ جبکہ } a^2 + b^2 \text{ اور } ab \text{ کی قیمت معلوم کیجیے۔} \quad .17$$

$$ab + bc + ca = 11 \text{ اور } a + b + c = 6 \text{ جبکہ } a^2 + b^2 + c^2 \text{ کی قیمت معلوم کیجیے۔} \quad .18$$

$$xy = 10 \text{ اور } x + y = 7 \text{ جبکہ } x^3 + y^3 \text{ کی قیمت معلوم کیجیے۔} \quad .19$$

$$x^2 + y^2 = 86 \text{ اور } xy = -16 \text{ جبکہ } (x - y)^2 \text{ کی قیمت معلوم کیجیے۔} \quad .20$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 81 \text{ اور } a + b + c = 11 \text{ جبکہ } ab + bc + ca \text{ کی قیمت معلوم کیجیے۔} \quad .21$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 32 \text{ اور } ab + bc + ca = 7 \text{ جبکہ } (a + b + c)^2 \text{ کی قیمت معلوم کیجیے۔} \quad .22$$

1.3 مقادیر اصم اور ان کا اطلاق SURDS AND THEIR APPLICATIONS

1.3.1 مقادیر اصم Surds

ناطق اعداد: Rational Numbers

ایک عدد جس کو $\left(\frac{p}{q}\right)$ کی شکل میں بیان کیا جاسکے جبکہ 'p, q' صحیح اعداد ہوں اور $q \neq 0$ ناطق عدد کہلاتا ہے۔

مثال کے طور پر $\frac{3}{4}, \frac{2}{1}, \frac{8}{7}, \frac{-2}{5}$ تمام ناطق اعداد ہیں۔

غیر ناطق اعداد: Irrational Numbers

ایک حقیقی عدد جو کہ ناطق عدد نہ ہو غیر ناطق عدد کہلاتا ہے۔

مثال کے طور پر $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$ وغیرہ تمام غیر ناطق اعداد ہیں۔

صاف ظاہر ہے کہ ایک غیر ناطق عدد کو $\left(\frac{p}{q}\right)$ کی شکل میں بیان نہیں کیا جاسکتا جبکہ 'p, q' صحیح اعداد ہوں اور $q \neq 0$

حقیقی اعداد: Real Numbers

دو غیر مشترک ناطق اعداد کے سیٹ Q اور غیر ناطق اعداد کے سیٹ Q' کا یونین حقیقی اعداد کا سیٹ کہلاتا ہے۔

جزر کی علامت والی مقادیر اصم: Surds of Radicals

جزر کی علامت پر مشتمل غیر ناطق عدد کو مقادیر اصم کہتے ہیں۔

مثال کے طور پر: $\sqrt{2}, 2\sqrt{3}, 4 + 3\sqrt{5}, 10 - 4\sqrt{6}, \frac{\sqrt{2}}{5}, \frac{9}{\sqrt{7}}$ تمام کی تمام مقادیر اصم ہیں۔

مثال:

$$\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}} \quad (i) \text{ درجہ 2 کی مقادیر اصم ہے۔}$$

$$\sqrt[3]{4} = 4^{\frac{1}{3}} \quad (ii) \text{ درجہ 3 کی مقادیر اصم ہے۔}$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \quad (iii) \text{ درجہ n کی مقادیر اصم ہے۔ 'a' کو مجذور کہتے ہیں۔}$$

جذر کے قوانین Laws of Radicals

جیسا کہ مقدار اصم کو ناطق قوت نمائیں لکھا جاسکتا ہے۔ لہذا قوت نما کے قوانین کا بھی مقدار اصم پر اطلاق ہوتا ہے۔
پس کسی بھی مثبت صحیح عدد 'n' اور مثبت ناطق اعداد 'a' اور 'b' کے لیے، ہمارے پاس درج ذیل قوانین ہیں۔

جذر کے قوانین	قوت نما کے قوانین
(i) $(\sqrt[n]{a})^n = a$	(i) $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a$
(ii) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$	(ii) $(ab)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}}$
(iii) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	(iii) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}$
(iv) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$	(iv) $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$

اصل مقدار اصم: Pure Surds

ایسی مقدار اصم جس کا جز و ضربی صرف '1' ہو اور دوسرا جز و ضربی غیر ناطق ہو۔ اصل مقدار اصم کہلاتی ہے۔

مثال: $\sqrt{2}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt[4]{3}$ خالص مقدار اصم ہیں۔

مخلوط مقدار اصم: Mixed Surds

ایسی مقدار اصم جس کا '1' کے علاوہ کوئی اور ناطق جز و ضربی ہو اور دوسرا جز و ضربی غیر ناطق ہو، مخلوط مقدار اصم کہلاتی ہے۔

مثال: $2\sqrt{3}$, $5\sqrt{7}$ مخلوط مقدار اصم ہیں۔

1.3.2 دوسرے درجہ کی مقادیر اصم: Surds of Second Order

$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ ایک ایسی مقدار اصم ہے جس کا مرتبہ 2 ہے یعنی کہ دو درجہ کی مقدار اصم۔

یاد رکھئے:

علامت $\sqrt{\quad}$ جذر کی علامت ہے جس کا انڈیکس 2 ہے۔

مشابہ مقادیر اصم: Similar Surds

ایسی مقادیر اصم جن میں غیر ناطق جزو ضربی ایک جیسا ہو مشابہ مقادیر اصم کہلاتی ہیں۔

مثابہ مقادیر اصم ہیں $\sqrt{3}$, $5\sqrt{3}$, $\frac{1}{7}\sqrt{3}$ ۔

ایسی مقادیر اصم جن کے غیر ناطق جزو ضربی مختلف ہوں۔ مختلف مقادیر اصم کہلاتی ہیں۔

مثابہ مقادیر اصم ہیں $\sqrt{2}$, $3\sqrt{5}$, $2\sqrt{3}$ ۔

مقادیر اصم کی جمع اور تفریق: Addition and Subtraction of Surds

مشابہ مقادیر اصم کی جمع اور تفریق کی جاسکتی ہیں۔

(i) $6\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = (6 + 5)\sqrt{3} = 11\sqrt{3}$ مثال:

(ii) $12\sqrt{5} + 4\sqrt{5} - 6\sqrt{5} = (12 + 4 - 6)\sqrt{5} = 10\sqrt{5}$

مقادیر اصم کی ضرب اور تقسیم: Multiplication and Division of Two Surds

ایک ہی درجہ کی مقادیر اصم کو درج ذیل قوانین کے تحت ضرب دی جاسکتی ہے اور تقسیم کیا جاسکتا ہے۔

کسی بھی قدرتی اعداد 'm' اور 'n' کے لیے

(i) $\sqrt{m} \times \sqrt{n} = \sqrt{mn}$ (ii) $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{m}{n}}$

مثال 1: $\sqrt{8} \times \sqrt{2}$ کو مختصر کریں۔

حل: قانون " $\sqrt{m} \times \sqrt{n} = \sqrt{mn}$ " کے مطابق

$\sqrt{8} \times \sqrt{2} = \sqrt{8 \times 2} = \sqrt{16} = 4$

مثال 2:-

$\sqrt{180} \div \sqrt{24}$ کو مختصر کریں۔

حل:

$$\sqrt{180} \div \sqrt{24} = \frac{\sqrt{180}}{\sqrt{24}} = \sqrt{\frac{180}{24}} \left[\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{m}{n}} \text{ کے مطابق} \right]$$

$$= \sqrt{\frac{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5}{2 \times 2 \times 2 \times 3}}$$

$$= \sqrt{\frac{15}{2}}$$

مخرج کو ناطق بنانا: Rationalizing The Denominator

ہم کسی کسر کو اس کے مخرج میں جذری علامت ختم کر کے مختصر کر سکتے ہیں۔ ہم ایسا کرنے کے لیے مخرج اور شمار کنندہ دونوں کو اس جذری رقم سے ضرب دیتے ہیں۔ یہ عمل مخرج کو ناطق بنانا کہلاتا ہے۔

مثال 1:- درج ذیل کو مختصر کریں۔

(a) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (b) $\frac{5}{7\sqrt{2}}$

حل:

(a) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ کو $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ سے ضرب دیں۔

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

(b) $\frac{5}{7\sqrt{2}}$ کو $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ سے ضرب دیں۔

$$\frac{5}{7\sqrt{2}} = \frac{5}{7\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{7 \times 2} = \frac{5\sqrt{2}}{14}$$

مثال 2:-

$(5 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})$ کو ضرب دیں۔

$$(2 + \sqrt{3})(5 - \sqrt{3})$$

حل:

$$= 2 \times 5 + 2 \times (-\sqrt{3}) + 5 \times \sqrt{3} + \sqrt{3}(-\sqrt{3})$$

$$= 10 - 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 3$$

$$= 7 + 3\sqrt{3}$$

مثال 3:- ضرب دیں۔

$$(3\sqrt{5} - 5\sqrt{2})(4\sqrt{5} + 3\sqrt{2})$$

$$(3\sqrt{5} - 5\sqrt{2})(4\sqrt{5} + 3\sqrt{2})$$

حل:

$$= 12(\sqrt{5})^2 + 9\sqrt{5}\sqrt{2} - 20\sqrt{2}\sqrt{5} - 15(\sqrt{2})^2$$

$$= 12 \times 5 + 9\sqrt{10} - 20\sqrt{10} - 15 \times (2)$$

$$= 60 - 30 - 11\sqrt{10}$$

$$= 30 - 11\sqrt{10}$$

مثال 4:-

مختصر ترین شکل میں لکھیے۔

(i) $\sqrt{288}$ (ii) $\sqrt{147}$ (iii) $\sqrt{36a^3}$

(i) $\sqrt{288}$

حل:

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3} \\
 &= \sqrt{2 \times 2} \times \sqrt{2 \times 2} \times \sqrt{3 \times 3} \times \sqrt{2} \\
 &= 2 \times 2 \times 3 \times \sqrt{2} \\
 &= 12\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

2	288
2	144
2	72
2	36
2	18
3	9
3	3
	1

(ii) $\sqrt{147}$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{7 \times 7 \times 3} \\
 &= \sqrt{7 \times 7} \times \sqrt{3} \\
 &= 7\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

7	147
7	21
3	3
	1

(iii) $\sqrt{36a^3}$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{6 \times 6 \times a \times a \times a} \\
 &= \sqrt{6 \times 6} \times \sqrt{a \times a} \times \sqrt{a} \\
 &= 6 \times a \times \sqrt{a} \\
 &= 6a\sqrt{a}
 \end{aligned}$$

1.4 ناطق بنانا: RATIONALIZATION

دورقی مقدار اصم: Binomial Surd

ایک ایسا دورقی جملہ جس میں کم از کم ایک رقم مقدار اصم ہو۔ دورقی مقدار اصم کہلاتی ہے۔

مثلاً $a + b\sqrt{x}$, $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ دورقی مقدار اصم ہیں۔

Conjugate of Binomial Surds: دورقی مقدار اصم کا کانجوگیٹ

(i) $a + b\sqrt{x}$ اور $a - b\sqrt{x}$

(ii) $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ اور $\sqrt{x} - \sqrt{y}$

درج بالا ایسی مقدار اصم کے جوڑے ہیں جن کا حاصل ضرب ایک ناطق جملہ ہے۔ مقدار اصم کا ایسا جوڑا دورقی مقدار اصم کا کانجوگیٹ کہلاتا ہے۔ جبکہ ان میں سے ہر ایک دوسرے کا کانجوگیٹ کہلاتا ہے۔

(i) $2 + 3\sqrt{5}$ کی کانجوگیٹ مقدار اصم $2 - 3\sqrt{5}$ ہے۔

(ii) $\sqrt{3} + \sqrt{7}$ کی کانجوگیٹ مقدار اصم $\sqrt{3} - \sqrt{7}$ ہے۔

یاد رکھیے کہ: دورقی کانجوگیٹ ایک دوسرے کے ناطق ساز جزو ضربی کہلاتے ہیں۔

جزو ناطق Rationalizing Factor

جب دو مقدار اصم کا حاصل ضرب ایک ناطق جملہ ہو تو وہ دونوں ایک دوسرے کا جزو ناطق ساز جزو ضربی کہلاتے ہیں۔

(i) $2\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 6$ (جو کہ ناطق ہے)

مثال:-

$2\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ کا ناطق ساز جزو ضربی ہے

(ii) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 3 - 2 = 1$ (جو کہ ایک ناطق ہے)

لہذا $(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ اور $(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ ایک دوسرے کے ناطق ساز جزو ضربی ہیں۔

مقدار اصم کو ناطق بنانا: Rationalization of Surds

کسی مقدار اصم کو مناسب ناطق ساز جزو سے ضرب دے کر اسے ناطق عدد میں تبدیل کرنے کا عمل مقدار اصم کو ناطق بنانا کہلاتا ہے۔

مثال 1:-

$$\frac{1}{5+2\sqrt{3}} \text{ کے مخرج کو ناطق بنائیے۔}$$

حل:-

$$= \frac{1}{5+2\sqrt{3}} \times \frac{5-2\sqrt{3}}{5-2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{5-2\sqrt{3}}{5^2-(2\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{5-2\sqrt{3}}{25-12} = \frac{5-2\sqrt{3}}{13}$$

مثال 2:-

$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \text{ کے مخرج کو ناطق بنائیے۔}$$

حل:-

$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$$

مثال 3:-

اگر $x = 3 + \sqrt{8}$ ہو تو درج ذیل کی قیمتیں معلوم کریں۔

- (i) $\frac{1}{x}$ (ii) $x + \frac{1}{x}$ (iii) $x - \frac{1}{x}$ (iv) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$
 (v) $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2$ (vi) $x^2 + \frac{1}{x^2}$ (vii) $x^2 - \frac{1}{x^2}$

حل:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \frac{1}{x} &= \frac{1}{3 + \sqrt{8}} \\ &= \frac{1}{3 + \sqrt{8}} \times \frac{3 - \sqrt{8}}{3 - \sqrt{8}} \\ &= \frac{3 - \sqrt{8}}{(3)^2 - (\sqrt{8})^2} = \frac{3 - \sqrt{8}}{9 - 8} \\ &= 3 - \sqrt{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad x + \frac{1}{x} &= (3 + \sqrt{8}) + (3 - \sqrt{8}) \\ &= 3 + \cancel{\sqrt{8}} + 3 - \cancel{\sqrt{8}} \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad x - \frac{1}{x} &= (3 + \sqrt{8}) - (3 - \sqrt{8}) \\ &= \cancel{3} + \sqrt{8} - \cancel{3} + \sqrt{8} \\ &= 2\sqrt{8} \end{aligned}$$

$$(iv) \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 6^2 \quad (\text{ع (ii)})$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 36$$

$$(v) \left(x - \frac{1}{x}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = (2\sqrt{8})^2 \quad (\text{ع (iii)})$$

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 32$$

$$(vi) x^2 + \frac{1}{x^2}$$

$$= x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 - 2$$

$$= \left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\right) - 2$$

$$= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$$

$$= 36 - 2 \quad (\text{ع (iv)})$$

$$= 34$$

$$(vii) x^2 - \frac{1}{x^2}$$

$$= \left(x + \frac{1}{x}\right) \left(x - \frac{1}{x}\right) = 6(2\sqrt{8}) \quad (\text{ع (ii, iii)})$$

$$= 12\sqrt{8}$$

مشق 1.3

1. مخرج سے جذری علامت دور کیجیے۔

(i) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (ii) $\frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{7}{\sqrt{3}}$ (iii) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$

2. درج ذیل جملوں کو مختصر کریں۔

(i) $\sqrt{2} + \sqrt{8}$ (ii) $4\sqrt{50} + \sqrt{200} + \sqrt{50}$
 (iii) $(\sqrt{12} - \sqrt{2})(\sqrt{20} - 3\sqrt{2})$ (iv) $(6 + \sqrt{2})(5 - \sqrt{5})$
 (v) $(\sqrt{3} - 2)(5 - \sqrt{5})$ (vi) $(7 + \sqrt{3})(5 + \sqrt{2})$

3. درج ذیل کے مخارج کو ناطق بنائیے۔

(i) $\frac{1}{\sqrt{3} + 2}$ (ii) $\frac{1}{4 - \sqrt{5}}$ (iii) $\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{7} + \sqrt{5}}$ (iv) $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$
 (v) $\frac{5\sqrt{7}}{2 + 3\sqrt{7}}$ (vi) $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ (vii) $\frac{29}{11 + 3\sqrt{5}}$
 (viii) $\frac{17}{3\sqrt{7} + 2\sqrt{3}}$

4. اگر $x = \sqrt{5} + 2$ ہو تو (i) $x + \frac{1}{x}$ اور (ii) $x^2 + \frac{1}{x^2}$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

5. اگر $x = 2 + \sqrt{3}$ ہو تو (i) $x - \frac{1}{x}$ اور (ii) $x^2 + \frac{1}{x^2}$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

6. اگر $x = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ ہو تو (i) $x - \frac{1}{x}$ اور (ii) $x^2 + \frac{1}{x^2}$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

7. اگر $\frac{1}{x} = 3 - \sqrt{2}$ ہو تو (i) $x + \frac{1}{x}$ اور (ii) $x - \frac{1}{x}$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

8. اگر $\frac{1}{p} = \sqrt{10} + 3$ ہو تو (i) $(p + \frac{1}{p})^2$ اور (ii) $(p - \frac{1}{p})^2$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

9. مخرج کو ناطق بنائیے۔ (i) $\frac{b + \sqrt{b^2 - a^2}}{b - \sqrt{b^2 - a^2}}$ (ii) $\frac{\sqrt{a+3} - \sqrt{a-3}}{\sqrt{a+3} + \sqrt{a-3}}$

جائزہ مشق-1

-I صحیح جوابات کے گرو دائرہ لگائیے۔

1. ایک $\frac{P(x)}{Q(x)}$ کی شکل کا الجبری جملہ جس میں $Q(x) \neq 0$ ہو جبکہ $P(x)$ اور $Q(x)$ کثیر رقمیاں ہوں کہلاتا ہے۔

- | | |
|---------------|---------------------|
| (a) ناطق عدد | (b) ناطق جملہ |
| (c) مقدار اصم | (d) مخلوط مقدار اصم |

2. $(a+b)^2 - (a-b)^2 = ?$

- | | |
|--------------------|-----------------|
| (a) $2(a^2 + b^2)$ | (b) $4ab$ |
| (c) $-4ab$ | (d) $a^2 + b^2$ |

3. $(a+b)^2 + (a-b)^2 = ?$

- | | |
|------------|--------------------|
| (a) $-4ab$ | (b) $a^2 + b^2$ |
| (c) $4ab$ | (d) $2(a^2 + b^2)$ |

4. $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = ?$

- | | |
|-----------------|-----------------|
| (a) $(a-b)^3$ | (b) $(a+b)^3$ |
| (c) $a^3 - b^3$ | (d) $a^3 + b^3$ |

5. $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = ?$

- | | |
|-----------------|-----------------|
| (a) $a^3 - b^3$ | (b) $(a+b)^3$ |
| (c) $(a-b)^3$ | (d) $a^3 + b^3$ |

6. $a^3 + 3ab(a+b) + b^3 = ?$

- | | |
|-----------------|-----------------|
| (a) $(a+b)^3$ | (b) $(a-b)^3$ |
| (c) $a^3 + b^3$ | (d) $a^3 - b^3$ |

7. $a^3 - 3ab(a-b) - b^3 = ?$

- | | |
|-----------------|---------------|
| (a) $a^3 + b^3$ | (b) $(a+b)^3$ |
| (c) $a^3 - b^3$ | (d) $(a-b)^3$ |

8. ایک غیر ناطق عدد جس میں جذر کی علامت ہو، کہلاتا ہے

- | | |
|---------------------|---------------|
| (a) مخلوط مقدار اصم | (b) مقدار اصم |
| (c) ناطق عدد | (d) قدرتی عدد |

9. مقدار اصم $\sqrt{a} = a^{1/2}$ کا درجہ ہے۔

(a) 0

(b) 1

(c) 2

(d) $\frac{1}{2}$

10. مقدار اصم کو ضرب دی جاسکتی ہے اگر وہ ہوں۔

(a) یکساں درجہ کی

(b) دو درجہ کی

(c) مختلف درجوں کی

(d) درجہ n کی

-II خالی جگہ پر کریں۔

1. ایک $\frac{p}{q}$ کی شکل کا عدد جس میں $p, q \in \mathbb{Z}$ اور $q \neq 0$ کہلاتا ہے۔

2. $\frac{P(x)}{Q(x)}$ کی شکل کا جملہ جس میں $Q(x) \neq 0$ اور $P(x), Q(x)$ کثیر رقمیاں ہوں، کہلاتا ہے۔

3. $(a+b)^2 - (a-b)^2 =$ _____

4. $(a+b)^2 + (a-b)^2 =$ _____

5. $a^3 + 3ab(a+b) + b^3 =$ _____

6. $a^3 - 3ab(a-b) - b^3 =$ _____

7. $(a-b)(a^2 + ab + b^2) =$ _____

8. $(a+b)(a^2 - ab + b^2) =$ _____

9. ایک غیر ناطق عدد جس میں جذری علامت ہو کہلاتا ہے۔

10. $\sqrt{a} = a^{1/2}$ درجہ کی مقدار اصم کہلاتی ہے۔

SUMMARY خلاصہ

کلیے: Formulae

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$$

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3ab(a \pm b) \pm b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

مقدار اصم: مقدار اصم ایک غیر ناطق جملہ ہے جس میں جذری علامت پائی جاتی ہے۔
خالص مقدار اصم: ایسی مقدار اصم جس میں '1' ایک ناطق جزو ضربی ہو اور دوسرا جزو ضربی غیر ناطق ہو۔
مخلوط مقدار اصم: ایسی مقدار اصم جس میں '1' ایک کے علاوہ کوئی ناطق جزو ضربی ہو جبکہ دوسرا جزو ضربی غیر ناطق ہو۔ مخلوط مقدار اصم کہلاتی ہے۔

مشابہ مقدار اصم: مقدار اصم جن کا یکساں غیر ناطق جزو ضربی ہو، ہم شکل / یکساں مقدار اصم کہلاتی ہیں۔
غیر مشابہ مقدار اصم: ایسی مقدار اصم جن میں غیر ناطق اجزائے ضربی مختلف ہوں۔ مشابہ مقدار اصم کہلاتی ہیں۔
ناطق ساز جزو ضربی: دو ایسی مقدار اصم کہ جن کا حاصل ضرب ایک ناطق عدد ہو تو دونوں ایک دوسرے کا ناطق ساز جزو ضربی کہلاتی ہیں۔

تجزی FACTORIZATION

تجزی

مسلہ باقی اور مسلہ تجزی

تین درجے والی کثیررتی کی تجزی

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:
درج ذیل قسم کے جملوں کی تجزی کر سکیں۔

- I قسم $kx + ky + kz,$
- II قسم $ax + ay + bx + by,$
- III قسم $a^2 \pm 2ab + b^2,$
- IV قسم $a^2 - b^2,$
- V قسم $(a^2 \pm 2ab + b^2) - c^2,$
- VI قسم $a^4 + a^2b^2 + b^4$ or $a^4 + 4b^4,$
- VII قسم $x^2 + px + q,$
- VIII قسم $ax^2 + bx + c,$
- IX قسم $\begin{cases} a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \\ a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3, \end{cases}$
- X قسم $a^3 \pm b^3,$

مسلہ باقی کا بیان اور اطلاق

بغیر تقسیم کیے کسی کثیررتی کو یک درجی کثیررتی سے تقسیم کرنے کے بعد جو باقی بچا معلوم کر سکیں۔

کسی کثیررتی میں صفر معلوم کر سکیں۔

مسلہ تجزی کا بیان اور مثالوں سے اس کی شناخت کر سکیں۔

مسلہ تجزی کے استعمال سے تین درجے والی کثیررتی کی تجزی معلوم کر سکیں۔

2.1 جملوں کی تجزی : FACTORIZATION OF EXPRESSIONS

یک درجہ کی کثیررتی : Linear Polynomials

ایسی کثیررتی جس کا درجہ '1' ہو، یک درجہ کی کثیررتی کہلاتی ہے۔ مثلاً $2x - 5$ ، $x + 3$ وغیرہ۔ یک درجہ کی کثیررتی کی عمومی شکل $ax + b$ ہے جبکہ a ، b حقیقی اعداد ہیں اور $a \neq 0$ ۔

دو درجہ کی کثیررتی : Quadratic Polynomials

ایسی کثیررتی جس کا درجہ '2' ہو۔ دو درجہ کی کثیررتی کہلاتی ہے۔ مثلاً $3x^2 + 5x - 2$ ، $4x^2 - 3x + 1$ وغیرہ۔ دو درجہ کی کثیررتی کی عمومی شکل $ax^2 + bx + c$ ہے۔ جبکہ a ، b ، c حقیقی اعداد ہیں اور $a \neq 0$ ۔

تین درجہ والی کثیررتی : Cubic Polynomials

ایسی کثیررتی جس کا درجہ '3' ہو۔ تین درجہ والی کثیررتی کہلاتی ہے۔ مثلاً $x^3 - 3x^2 + 5x + 2$ ، $4x^3 + 5x^2 - 2$ وغیرہ۔ تین درجہ والی کثیررتی کی عمومی شکل $ax^3 + bx^2 + cx + d$ ہوتی ہے۔ جبکہ a ، b ، c ، d حقیقی اعداد ہیں اور $a \neq 0$ ۔

اگر $P(x)$ کوئی کثیررتی ہو اور a ، b ، c کوئی حقیقی اعداد ہوں جبکہ $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$ ہو تو صاف ظاہر ہے کہ $(x-a)$ ، $(x-b)$ ، $(x-c)$ ہر ایک $P(x)$ کا یک درجہ جزو ضربی ہے۔

کسی بھی کثیررتی کو یک درجہ کی کثیررتوں کے حاصل ضرب یا اس کثیررتی کے درجہ سے کم درجہ والی کثیررتوں کے حاصل ضرب کی صورت میں لکھنے کے عمل کو تجزی کرنا کہتے ہیں

ہم جانتے ہیں کہ $15 = 3 \times 5$ میں $(3, 5)$ کے اجزائے ضربی کہلاتے ہیں۔ اس طرح $ax + ay = a(x + y)$ میں a ، $(x + y)$ کے اجزائے ضربی کہلاتے ہیں اور $ax + ay + az = a(x + y + z)$ میں a اور $(x + y + z)$ کے اجزائے ضربی کہلاتے ہیں۔

کسی جملے کو اس کے اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کی صورت میں لکھنے کے عمل کو تجزی کرنا کہتے ہیں۔ ہم مختلف قسم کے جملوں کی تجزی کرتے ہیں۔

$kx + ky + kz$ کی شکل کے جملوں کی اجزائے ضربی

درج ذیل مثالوں سے اس قسم کے جملوں کی اجزائے ضربی کی وضاحت ہوگی۔

مثال 1:-

درج ذیل کے اجزائے ضربی بنائیے۔

(i) $3x + 12y$

(ii) $x^2 + xy$

(iii) $ad + dc + df$

(iv) $2pq + 6p^2q - 4p^3q$

حل:

(i) $3x + 12y = 3(x + 4y)$

(ii) $x^2 + xy = x(x + y)$

(iii) $ad + dc + df = d(a + c + f)$

(iv) $2pq + 6p^2q - 4p^3q = 2pq(1 + 3p - 2p^2)$

$ax + ay + bx + by$ کی قسم کے جملوں کی اجزائے ضربی

درج ذیل مثالوں سے اس قسم کے جملوں کی اجزائے ضربی کی وضاحت ہوگی۔

مثال 2:-

درج ذیل جملوں کی اجزائے ضربی کیجیے۔

(i) $2ax + bx + 6ay + 3by$

(ii) $2yx + 18y^2 - 3zx + 27zy$

(iii) $5ym + 15yn + 2zm + 6zn$

حل:

(i) $2ax + bx + 6ay + 3by$

$= x(2a + b) + 3y(2a + b)$

$= (2a + b)(x + 3y)$

$(2a + b)(x + 3y) = 2ax + bx + 6ay + 3by$ ہم پڑتال کرتے ہیں۔

(ii) $2yx + 18y^2 + 3zx + 27zy$

(iii) $5ym + 15yn + 2zm + 6zn$

$= 2y(x + 9y) + 3z(x + 9y)$

$= 5y(m + 3n) + 2z(m + 3n)$

$= (2y + 3z)(x + 9y)$

$= (5y + 2z)(m + 3n)$

$a^2 \pm 2ab + b^2$ کی شکل کے جملوں کی اجزائے ضربی

(i) $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ ہم جانتے ہیں کہ

(ii) $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

(i) اور (ii) کی بائیں جانب کے جملے مکمل مربع کہلاتے ہیں۔ یہ فارمولے، کچھ جملوں کی تجزی کرنے میں معاون ثابت ہوتے ہیں۔ درج ذیل مثالیں ایسے جملوں کی تجزی کی وضاحت کریں گی۔

مثال 3:-

درج ذیل کی تجزی کریں۔

(i) $x^2 + 6x + 9$ (ii) $t^2 - 12t + 36$

(i) $x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2(3)(x) + 3^2$
 $= (x + 3)^2$

(ii) $t^2 - 12t + 36 = t^2 - 2(6)(t) + 6^2$
 $= (t - 6)^2$

حل:

$a^2 - b^2$ کی قسم کے جملوں کی تجزی معلوم کرنا۔

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ یہ دو مربعوں کا فرق کہلاتا ہے۔

درج ذیل مثالیں ایسے جملوں کی تجزی کی وضاحت کریں گی۔

مثال 4:-

درج ذیل کی تجزی کریں۔

(i) $k^2 - 81$ (ii) $9a^2 - (b + c)^2$

(i) $k^2 - 81 = k^2 - 9^2$
 $= (k + 9)(k - 9)$

(ii) $9a^2 - (b + c)^2 = (3a)^2 - (b + c)^2$
 $= [3a + (b + c)][3a - (b + c)]$
 $= [3a + b + c][3a - b - c]$

حل:

مثال 5:- تجزی کیجیے۔ $36d^2 - 1$

$$\begin{aligned} 36d^2 - 1 &= (6d)^2 - (1)^2 \\ &= (6d + 1)(6d - 1) \end{aligned}$$

حل:

مشق 2.1

تجزی کیجیے۔

1- $3a(x + y) - 7b(x + y)$

2- $ax + ay - x^2 - xy$

3- $a^3 + a - 3a^2 - 3$

4- $x^3 + y - xy - x$

5- $3ax + 6ay - 8by - 4bx$

6- $2a^2 - bc - 2ab + ac$

7- $a(a - b + c) - bc$

8- $8 - 4a - 2a^3 + a^4$

9- $16x^2 - 24xa + 9a^2$

10- $1 - 14x + 49x^2$

11- $20x^2 + 5 - 20x$

12- $2a^3b + 2ab^3 - 4a^2b^2$

13- $x^2 + x + \frac{1}{4}$

14- $x^2 + \frac{1}{x^2} - 2$

15- $5x^3 - 30x^2 + 45x$

16- $a^2 + b^2 + 2ab + 2bc + 2ac$

$$(i) (a^2 + 2ab + b^2) - c^2$$

$$(ii) (a^2 - 2ab + b^2) - c^2$$

ان جملوں کی تجزی کی وضاحت درج ذیل مثالوں سے ہوگی۔

مثال 1:-

تجزی کیجیے۔ $x^2 + 2xy + y^2 - 4z^2$

حل:

$$\begin{aligned} &(x^2 + 2xy + y^2) - 4z^2 \\ &= (x + y)^2 - (2z)^2 \\ &= (x + y - 2z)(x + y + 2z) \end{aligned}$$

مثال 2:-

اجزائے ضربی کی صورت میں لکھیے۔ $c^2 + 6bc + 9b^2 - 16x^2$

حل:

$$\begin{aligned}
 & (c^2 + 6bc + 9b^2) - 16x^2 \\
 &= (c + 3b)^2 - (4x)^2 \\
 &= (c + 3b + 4x)(c + 3b - 4x)
 \end{aligned}$$

مثال 3:-

تجزی کیجیے۔

$$\begin{aligned}
 (i) & a^2 - 2ab + b^2 - 9c^2 \\
 (ii) & x^2 - 6xy + 9y^2 - 4z^2
 \end{aligned}$$

حل:

$$\begin{aligned}
 (i) \quad a^2 - 2ab + b^2 - 9c^2 &= a^2 - 2ab + b^2 - 9c^2 \\
 &= (a - b)^2 - (3c)^2 \\
 &= (a - b - 3c)(a - b + 3c) \\
 (ii) \quad x^2 - 6xy + 9y^2 - 4z^2 &= x^2 - 2(3)xy + 9y^2 - 4z^2 \\
 &= (x - 3y)^2 - (2z)^2 \\
 &= (x - 3y - 2z)(x - 3y + 2z)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (i) \quad a^4 + a^2b^2 + b^4 \\
 (ii) \quad a^4 + 4b^4
 \end{aligned}$$

کی شکل کے جملوں کی تجزی

مثال 4:-

تجزی کیجیے۔ $x^4 + x^2 + 1$

حل:

$$\begin{aligned}
 x^4 + x^2 + 1 &= x^4 + x^2 + 1 + x^2 - x^2 \\
 &= (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 \\
 &= (x^2 + 1)^2 - x^2 \\
 &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)
 \end{aligned}$$

مثال 5:-

تجزی کیجیے۔ $x^4 + 64$

$$\begin{aligned}
 \text{حل:} \quad x^4 + 64 &= (x^2)^2 + 8^2 + 2(8)x^2 - 2(8)x^2 \\
 &= (x^2 + 8)^2 - 16x^2 \\
 &= (x^2 + 8)^2 - (4x)^2 \\
 &= (x^2 + 8 + 4x)(x^2 + 8 - 4x)
 \end{aligned}$$

مثال 6:-

اجزائے ضربی لکھیے۔ $x^4 + x^2y^2 + y^4$

$$\begin{aligned}
 \text{حل:-} \quad x^4 + x^2y^2 + y^4 &= (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) - x^2y^2 \\
 &= (x^2 + y^2)^2 - (xy)^2 \\
 &= (x^2 + y^2 + xy)(x^2 + y^2 - xy)
 \end{aligned}$$

مشق 2.2

جز و ضربی بنائیے۔

- | | |
|--|---------------------------------|
| 1. $x^2 + 2xy + y^2 - a^2$ | 2. $4a^2 + 4ab + b^2 - 9c^2$ |
| 3. $x^2 + 6ax + 9a^2 - 16b^2$ | 4. $y^2 - c^2 + 2cx - x^2$ |
| 5. $x^2 + y^2 + 2xy - 4x^2y^2$ | 6. $a^2 - 4ab + 4b^2 - 9a^2c^2$ |
| 7. $x^2 - 2xy + y^2 - a^2 + 2ab - b^2$ | 8. $y^4 + 4$ |
| 9. $z^4 + 64y^4$ | 10. $x^4 + 324$ |
| 11. $z^4 - z^2 + 16$ | 12. $4x^4 - 5x^2y^2 + y^4$ |

$x^2 + px + q$ کی شکل کے جملوں کی تجزی

$$x^2 + px + q = (x + r)(x + s) \quad \text{فرض کیا}$$

$$x^2 + px + q = x^2 + (r + s)x + rs \quad \text{تب}$$

دونوں اطراف ایک جیسی رقموں کے عددی سروں کا موازنہ کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$r + s = p \quad \text{اور} \quad rs = q$$

پس $x^2 + px + q$ کی اجزائے ضربی لکھنے کے لیے ہمیں دو نمبروں 'r' اور 's' کی قیمت معلوم کرنا ہے۔ اس طرح کہ

$$-rs = q \quad \text{اور} \quad r + s = p$$

درج ذیل مثالیں اس طرح کے جملوں کی تجزی کی وضاحت ہوگی۔

مثال :-

تجزی کیجیے۔

$$(i) x^2 + 7x + 12 \quad (ii) x^2 + 4x - 21 \quad (iii) x^2 - 5x - 14$$

حل :

(i) $x^2 + 7x + 12$ کی تجزی کرنے کے لیے ہمیں 'r' اور 's' کی قیمتیں معلوم کرنا ہوں گی۔ جبکہ

$$r + s = 7 \quad \text{اور} \quad rs = 12$$

$$4 + 3 = 7 \quad \text{اور} \quad 4 \times 3 = 12 \quad \text{صاف ظاہر ہے کہ}$$

$$\therefore x^2 + 7x + 12 = x^2 + 4x + 3x + 12$$

$$= x(x + 4) + 3(x + 4)$$

$$= (x + 4)(x + 3)$$

(ii) $x^2 + 4x - 21$ کی جزو ضربی لکھنے کے لیے ہمیں 'r' اور 's' کی قیمتیں معلوم کرنا ہوں گی جبکہ

$$r + s = 4 \quad \text{اور} \quad rs = -21$$

$$7 + (-3) = 4 \quad \text{اور} \quad 7(-3) = -21 \quad \text{صاف ظاہر ہے کہ}$$

$$\therefore x^2 + 4x - 21 = x^2 + 7x - 3x - 21$$

$$= x(x + 7) - 3(x + 7)$$

$$= (x + 7)(x - 3)$$

(iii) $x^2 - 5x - 14$ کی اجزائے ضربی معلوم کرنے کے لیے 'r' اور 's' کی قیمتیں معلوم کرنا ہوگی جبکہ

$$r + s = -5 \quad \text{اور} \quad rs = -14$$

$$-7 + 2 = -5 \quad \text{اور} \quad -7 \times 2 = -14 \quad \text{صاف ظاہر ہے کہ}$$

$$\therefore x^2 - 5x - 14 = x^2 - 7x + 2x - 14$$

$$= x(x-7) + 2(x-7)$$

$$= (x-7)(x+2)$$

شکل کے جملوں کی اجزائے ضربی معلوم کرنا۔ $ax^2 + bx + c, a \neq 0$

$ax^2 + bx + c$ کے شکل کے جملے کی تجزیہ کرنے کے لیے اعداد 'p' اور 'q' اس طرح سے معلوم کرتے ہیں۔

کہ $p + q = b$ اور $pq = ac$ جبکہ a, b, c مستقل مقادیر ہیں اور $a \neq 0$ ۔

مندرجہ ذیل مثالیں اس طرح کے جملوں کی تجزیہ کی وضاحت کریں گی۔

مثال:- تجزیہ کیجیے۔

$$(i) 6x^2 + 7x - 3 \quad (ii) \sqrt{3}x^2 + 11x + 6\sqrt{3}$$

حل:

$$(i) 6x^2 + 7x - 3 \text{ دیا گیا جملہ}$$

$$ax^2 + bx + c \text{ کی شکل میں ہے، } ac = 6 \times (-3) = -18$$

$$\begin{aligned} \therefore 6x^2 + 7x - 3 &= 6x^2 + 9x - 2x - 3 \\ &= 3x(2x + 3) - 1(2x + 3) \\ &= (2x + 3)(3x - 1) \end{aligned}$$

$$(ii) \sqrt{3}x^2 + 11x + 6\sqrt{3}; ac = \sqrt{3} \times 6\sqrt{3} = 18$$

$$9 + 2 = 11 \text{ صاف ظاہر ہے۔}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt{3}x^2 + 11x + 6\sqrt{3} &= \sqrt{3}x^2 + 9x + 2x + 6\sqrt{3} \\ &= \sqrt{3}x[x + 3\sqrt{3}] + 2[x + 3\sqrt{3}] \\ &= (\sqrt{3}x + 2)(x + 3\sqrt{3}) \end{aligned}$$

$$6 \times (-3) = -18$$

مکمل کر لیں

$$18 \times (-1) = -18$$

$$(-18) \times (1) = -18$$

$$6 \times (-3) = -18$$

$$-6 \times 3 = -18$$

$$-9 \times 2 = -18$$

$$9 \times (-2) = -18$$

منتخب شدہ جڑیں

$$9 \times (-2) = -18$$

مشق 2.3

اجزائے ضربی بنائیے۔

1. $x^2 + 9x + 20$
2. $x^2 + 5x - 14$
3. $x^2 + 5x - 6$
4. $x^2 - 7x + 12$
5. $x^2 - x - 156$
6. $x^2 - x - 2$
7. $x^2 - 9x - 90$
8. $a^2 - 12a - 85$
9. $98 - 7x - x^2$
10. $y^2 - 11y - 152$
11. $2x^2 + 3x + 1$
12. $3x^2 + 5x + 2$
13. $2x^2 - x - 1$
14. $6x^2 + 7x - 3$
15. $2 - 3x - 2x^2$
16. $8 + 6x - 5x^2$
17. $3u^2 - 10u + 8$
18. $10x^2 - 7x - 12$
19. $5x^2 - 32x + 12$
20. $4\sqrt{3}x^2 + 5x - 2\sqrt{3}$

$$\left\{ \begin{array}{l} a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{array} \right\}$$

(i) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ہم جانتے ہیں کہ

(ii) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

درج ذیل مثالیں اس قسم کے جملوں کی تجزی کی وضاحت کریں گی۔

مثال :- تجزی کیجیے۔ (i) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$ (ii) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

حل:

$$\begin{aligned} \text{(i) } x^3 + 6x^2 + 12x + 8 &= (x)^3 + 3(2)(x)^2 + 3(2)^2x + (2)^3 \\ &= (x + 2)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii) } x^3 - 6x^2 + 12x - 8 &= (x)^3 - 3(2)(x)^2 + 3(2)^2x - (2)^3 \\ &= (x - 2)^3 \end{aligned}$$

$a^3 \pm b^3$ کی قسم کے جملوں کی تجزی

ہمیں معلوم ہے کہ

$$(i) \quad a^3 + b^3 = (a+b) (a^2 - ab + b^2)$$

$$(ii) \quad a^3 - b^3 = (a-b) (a^2 + ab + b^2)$$

مندرجہ ذیل مثالوں سے اس قسم کے جملوں کی وضاحت کریں گی۔

مثال 1:-

تجزی کیجیے۔

$$(i) \quad x^3 + 27 \quad (ii) \quad 8a^3 - 125b^3 \quad (iii) \quad x^6 - y^6 \quad (iv) \quad a^3 - b^3 - a + b$$

حل:

$$(i) \quad x^3 + 27 = x^3 + 3^3 \\ = (x+3) (x^2 - 3x + 9)$$

$$(ii) \quad 8a^3 - 125b^3 = (2a)^3 - (5b)^3 \\ = (2a-5b) [(2a)^2 + (2a) \times (5b) + (5b)^2] \\ = (2a-5b) [4a^2 + 10ab + 25b^2]$$

$$(iii) \quad x^6 - y^6 = (x^3)^2 - (y^3)^2 \\ = (x^3 + y^3) (x^3 - y^3) \\ = (x+y) (x^2 - xy + y^2) (x-y) (x^2 + xy + y^2) \\ = (x+y) (x-y) (x^2 - xy + y^2) (x^2 + xy + y^2)$$

$$(iv) \quad a^3 - b^3 - a + b = (a^3 - b^3) - (a - b) \\ = (a-b) (a^2 + ab + b^2) - (a-b) \\ = (a-b) [a^2 + ab + b^2 - 1]$$

یاد رکھیے:

(i) $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

(ii) $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

(iii) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$

(iv) $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$

(v) $(x + y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3$

(vi) $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$

مشق 2.4

تجزی کیجیے۔

1. $8x^3 - y^3$

2. $27x^3 + 1$

3. $1 - 343x^3$

4. $a^3b^3 + 512$

5. $27 - 1000y^3$

6. $27x^3 - 64y^3$

7. $x^3y^3 + z^3$

8. $216P^3 - 343$

9. $8x^3 - \frac{1}{27}$

10. $a^3 + b^3 + a + b$

11. $a - b - a^3 + b^3$

12. $x - 8xy^3$

13. $x^{12} - y^{12}$

14. $1 - \frac{64p^3}{q^3}$

15. $1 + 64U^3$

16. $8x^3 - 6x - 9y + 27y^3$

17. $z^3 + 125$

18. $x^9 + y^9$

19. $m^6 - n^6$

20. $64x^7 - xa^6$

21. $x^3 - 27a^3$

22. $x^3 + 27a^3$

2.2 مسئلہ باقی اور مسئلہ تجزی:

REMAINDER THEOREM AND FACTOR THEOREM

ایک تفاعل (function) کو درج ذیل مساوات سے متعارف کرایا گیا ہے۔

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0$$

جس میں 'n' ایک غیر منفی صحیح عدد ہے اور تمام عددی سر، مستقل مقداریں ہیں۔ ایسا تفاعل درجہ 'n' کی کثیرتی کہلاتا ہے۔

(i) $P(x) = a_1 x + a_0$ (یک درجہ کثیرتی تفاعل ہے) $a_1 \neq 0$ مثلاً

(ii) $P(x) = 3x^2 + 5x + 11$ (دو درجہ کثیرتی تفاعل ہے)

(iii) $P(x) = 7x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 5x + 6$ (5 درجہ کثیرتی تفاعل ہے)

(iv) $P(x) = 5x^5 + \frac{7}{x} + 6 = 5x^2 + 7x^{-1} + 6$ (یہ تفاعل کثیرتی نہیں ہے)

مثال:-

$P(x) = 2x^4 + 3x^3 - x - 5$ کو $x + 2$ سے تقسیم کیجیے۔

حل:

$2x^3 - x^2 + 2x - 5$	$\leftarrow$	حاصل قسمت		$2x^4 + 3x^3 - x - 5$	$\leftarrow$	مقسوم علیہ
				$\pm 2x^4 \pm 4x^3$		
				$-x^3 - x - 5$		
				$\mp x^3 \quad \mp 2x^2$		
				$2x^2 - x - 5$		
				$\pm 2x^2 \pm 4x$		
				$-5x - 5$		
				$\mp 5x \mp 10$		
				5	$\leftarrow$	باقی

یاد رکھیے کہ: باقی + حاصل قسمت $\times$ تقسیم کنندہ = مقسوم علیہ

2.2.1 مسئلہ باقی The Remainder Theorem

اگر کسی کثیر رقمی $P(x)$ کو $x - a$ پر تقسیم کرنے سے R باقی بچے تو $P(a) = R$

یا

اگر کثیر رقمی $P(x)$ جس کا درجہ $n \geq 1$ ہو تو $x - a$ سے تقسیم کیا جائے جبکہ 'a' ایک مستقل مقدار ہو تو باقی $P(a)$ ہوتا ہے۔ جبکہ اس میں x رکھنے والی رقم نہ بچے۔

مثال 1:-

اگر $P(x) = 4x^4 + 10x^3 + 19x + 5$ کو $x + 3$ پر تقسیم کیا جائے تو باقی معلوم کریں۔

$$P(x) = 4x^4 + 10x^3 + 19x + 5$$

حل:

$$x - a = x + 3 \Rightarrow a = -3$$

$$P(-3) = 4(-3)^4 + 10(-3)^3 + 19(-3) + 5 \quad \text{لہذا}$$

$$= 4 \times 81 - 10 \times 27 - 57 + 5$$

$$= 324 - 270 - 57 + 5$$

$$= -3 + 5$$

$$P(-3) = 2 \quad \text{پس}$$

$$\boxed{R = 2}$$

مثال 2:-

اگر $P(x) = 5x^4 + 14x^3 + 3x^2 - 5x - 3$ کو $x - 1$ سے تقسیم کیا جائے تو باقی معلوم کریں۔

$$P(x) = 5x^4 + 14x^3 + 3x^2 - 5x - 3$$

حل:

$$x - a = x - 1 \Rightarrow a = 1$$

$$P(1) = 5(1)^4 + 14(1)^3 + 3(1)^2 - 5(1) - 3 \quad \text{لہذا}$$

$$= 5 + 14 + 3 - 5 - 3$$

$$= 14$$

$$P(1) = 14 \quad \text{پس}$$

$$\boxed{R = 14}$$

2.2.2 تقسیم کے بغیر باقی معلوم کرنا Finding Remainder Without Dividing

درج ذیل مثالوں میں ہم بغیر تقسیم کے باقی نکالنا سیکھتے ہیں۔ جبکہ کسی کثیررقمی کو ایک درجی کثیررقمی سے تقسیم کیا جائے۔

مثال 1:-

مسئلہ باقی کا استعمال کرتے ہوئے باقی معلوم کریں جبکہ پہلی کثیررقمی کو دوسری کثیررقمی سے تقسیم کیا جائے۔

(i) $x^2 + 3x + 7, x + 1$

(ii) $x^3 - 2x^2 + 3x + 3, x - 3$

$P(x) = x^2 + 3x + 7$

(i) فرض کیا

چونکہ $x + 1$ تقسیم کنندہ

لہذا $x - a = x + 1 \Rightarrow a = -1$

مسئلہ باقی کی رو سے

$R = P(-1)$

$P(-1) = (-1)^2 + 3(-1) + 7$

اب $= 1 - 3 + 7$

$R = 5$

(ii) فرض کیا $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 3$

$x - a = x - 3 \Rightarrow a = 3$

$R = P(3)$

اب $P(3) = (3)^3 - 2(3)^2 + 3(3) + 3$

$= 27 - 18 + 9 + 3$

$R = 21$

مثال 2:-

جب $x^4 + 2x^3 + kx^2 + 3$ کو $x - 2$ سے تقسیم کیا جاتا ہے تو باقی بچتا ہے 'k' کی قیمت معلوم کریں۔

فرض کیا $P(x) = x^4 + 2x^3 + kx^2 + 3$

چونکہ $x - 2$ تقسیم کنندہ

لہذا $x - a = x - 2 \Rightarrow a = 2$

$$P(2) = (2)^4 + 2(2)^3 + k(2)^2 + 3$$

$$= 16 + 16 + 4k + 3 = 35 + 4k$$

یہاں پر $P(2) = 1$ (دیا گیا)۔

$$1 = 35 + 4k \Rightarrow 4k = -34 \Rightarrow k = \frac{-17}{2}$$

Zeros of a Polynomial

2.2.3

$$x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 \quad (ii)$$

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \quad (i)$$

اگر $P(x) = x - a_1$ اور $Q(x) = x - a_2$ کوئی سی ایک درجہ کثیر رقمی ہوں اس طرح کہ $P(a_1) = 0$ اور $Q(a_2) = 0$ تو a_2, a_1 بالترتیب $P(x)$ اور $Q(x)$ کے صفر کہلاتے ہیں۔

$$1 - a_1 = 0 \Leftrightarrow 1 + a_2 = 0 - a_2$$

2.2.4 مسئلہ تجزی: The Factor Theorem

$$(1 - a_1) = 0$$

اگر کثیر رقمی $P(x)$ کے لیے $P(a) = 0$ ہو تو $P(x) = (x - a)Q(x)$ کا جزو ضربی ہوتا ہے۔

اس کے برعکس اگر $x - a$ ، $P(x)$ کا جزو ضربی ہو تو $P(x) = (x - a)Q(x)$ کا صفر ہوگا۔

مثال 1:-

$$P(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 \quad (ii)$$

مسئلہ تجزی سے معلوم کریں کہ پہلی کثیر رقمی دوسری کثیر رقمی کا جزو ضربی ہے یا نہیں؟

$$x^4 - 1, \quad x^2 + 4x - 5 \quad (i)$$

$$P(x) = x^2 + 4x - 5 \quad \text{فرض کیا}$$

حل:

$$x^2 + 4x - 5 = (x - a)Q(x)$$

$$\Rightarrow a = 1$$

$$P(1) = 1^2 + 4(1) - 5$$

$$= 1 + 4 - 5 = 0$$

$$P(x) = x^2 + 4x - 5 = (x - 1)Q(x)$$

$$P(1) = 0$$

لہذا مسئلہ تجزی کی رو سے $x - 1$ ، $x^2 + 4x - 5$ کا جزو ضربی ہے۔

مثال 2:- مسئلہ تجزی کے استعمال سے ثابت کیجیے کہ $x + 1$ ، $P(x) = x^{25} + 1$ کا جزو ضربی ہے۔

حل: قیمت درج کرنے سے پتا چلتا ہے کہ -1 ، $P(x)$ کا صفر ہے۔

$$P(x) = x^{25} + 1$$

$$P(-1) = (-1)^{25} + 1 \quad \therefore (-1) \text{ طاق} = -1$$

$$= -1 + 1$$

$$= 0$$

چونکہ -1 ، $P(x) = x^{25} + 1$ کا صفر ہے۔

$$x - (-1) = x + 1 \quad \text{لہذا ایک درجی کثیر رقمی}$$

مسئلہ تجزی کی رو سے کثیر رقمی $x^{25} + 1$ کا جزو ضربی ہے۔

مثال 3:- مسئلہ تجزی استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں کہ $x - 1$ ، $4x^7 - 2x^6 + x^2 + 2x + 5$ کا جزو ضربی نہیں ہے۔

کا جزو ضربی نہیں ہے۔

حل: فرض کیا کہ $P(x) = 4x^7 - 2x^6 + x^2 + 2x + 5$

$$x - a = x - 1 \Rightarrow a = 1$$

$$P(1) = 4(1)^7 - 2(1)^6 + 1^2 + 2(1) + 5$$

$$= 4 - 2 + 1 + 2 + 5$$

$$= 10 \neq 0$$

پس $x - 1$ ، $4x^7 - 2x^6 + x^2 + 2x + 5$ کا جزو ضربی نہیں ہے۔

مثال 4:- مسئلہ تجزی کے استعمال سے ثابت کریں کہ $x + 1$ ، $2x^5 - 5x^2 - x + 4$ کا جزو ضربی نہیں ہے۔

حل: چونکہ $P(x) = 2x^5 - 5x^2 - x + 4$

$$x - a = x + 1 \Rightarrow a = -1$$

$$P(-1) = 2(-1)^5 - 5(-1)^2 - (-1) + 4$$

$$= -2 - 5 + 1 + 4$$

$$P(-1) = -2 \neq 0$$

پس $x + 1$ ، $2x^5 - 5x^2 - x + 4$ کا جزو ضربی نہیں ہے۔

2.3 تین درجہ کثیر رقمی کی تجزی کرنا: FACTORIZING A CUBIC POLYNOMIAL

کسی تین درجہ کثیر رقمی کی تجزی سمجھنے کے لیے ہم درج ذیل مثالوں کا مطالعہ کرتے ہیں۔

مثال 1:- درج ذیل کی تجزی کیجیے۔ $x^3 - x^2 - 10x + 10; x - 1$

حل:

$$P(x) = x^3 - x^2 - 10(x) + 10; x - 1$$

$$x - a = x - 1 \Rightarrow a = 1$$

$$P(1) = 1^3 - 1^2 - 10 + 10$$

$$= 0 \quad \text{لہذا } x - 1, P(x) \text{ کا جزو ضربی ہے۔}$$

$$x^2 - 10$$

$$x - 1 \overline{) x^3 - x^2 - 10x - 10} \quad \text{اب}$$

$$\underline{\pm x^3 \mp x^2}$$

$$-10x + 10$$

$$\underline{\mp 10x \pm 10}$$

$$0$$

چونکہ تقسیم کنندہ $\times$ حاصل قسمت $P(x)$

$$x^3 - x^2 - 10x + 10 = (x^2 - 10)(x - 1) \quad \text{پس}$$

مثال 2:- $x^3 - 8$ کی تجزی کیجیے جبکہ $x - 2$ جزو ضربی ہو۔

حل:

$$P(x) = x^3 - 8, x - a = x - 2 \Rightarrow a = 2$$

$$P(2) = 2^3 - 8 = 8 - 8$$

$$= 0 \quad \text{پس } x - 2, P(x) \text{ کا جزو ضربی ہے۔}$$

$$x^2 + 2x + 4$$

$$x - 2 \overline{) x^3 - 8} \quad \text{اب}$$

$$\underline{\pm x^3 \mp 2x^2}$$

$$2x^2 - 8$$

$$\underline{\pm 2x^2 \mp 4x}$$

$$4x - 8$$

$$\text{پس } P(x) = x^3 - 8$$

$$= (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

$$\underline{\pm 4x \mp 8}$$

$$0$$

مشق 2.5

I- دی گئی قیمت کے لیے کثیررتی کی قیمت معلوم کریں۔

1. $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7x - 7$; $P(2)$
2. $P(x) = x^4 - 10x^2 + 25x - 2$; $P(-4)$
3. $P(x) = x^4 + 5x^3 - 13x^2 - 30$; $P(-1)$
4. $P(x) = x^5 - 10x^3 + 7x + 6$; $P(3)$
5. $P(x) = x^4 + 4x^3 - 9x^2 + 19x + 6$; $P(-2)$

II- تقسیم کیے بغیر معلوم کریں کہ دوسری کثیررتی، پہلی کثیررتی کا جزو ضربی ہے یا نہیں۔

- | | |
|--------------------------------------|---|
| 6. $x^{18} - 1$; $x + 1$ | 7. $x^{18} - 1$; $x - 1$ |
| 8. $x^9 - 2^9$; $x + 2$ | 9. $x^9 + 2^9$; $x - 2$ |
| 10. $3x^4 - 2x^3 + 5x - 6$; $x - 1$ | 11. $5x^6 - 7x^3 - 6x + x$; $x - 1$ |
| 12. $3x^3 - 7x^2 - 8x + 2$; $x + 1$ | 13. $5x^8 - 2x^5 + 3x^3 + 6x + 2$; $x + 1$ |
| 14. $6x^3 + 2x^2 - x + 9$; $x - 1$ | 15. $4x^3 - 3x^2 - 8x + 4$; $x - 2$ |
| 16. $5x^3 + 3x^2 - x + 1$; $x + 1$ | 17. $2y^3 - 8y^2 + y - 4$; $y - 4$ |
| 18. $z^3 - 5z^2 - 4z - 4$; $z + 2$ | |

III- حل کریں۔

19. اگر $P(x) = x^3 - kx^2 + 3x + 5$ کو $x - 1$ پر تقسیم کرنے سے 8 باقی بچتا ہو تو 'k' کی قیمت معلوم کریں۔

20. اگر $P(x) = 3x^3 + kx - 26$ کو $x - 2$ پر تقسیم کرنے سے 0 باقی بچتا ہو تو 'k' کی قیمت معلوم کریں۔

جائزہ مشق-2

I- درست جوابات پر دائرہ لگائیے۔

1. ایک درجی کثیررتبی کا درجہ ہوتا ہے۔

(a) 0

(b) 1

(c) 2

(d) 3

1. $P(x) = 5x^3 - 2x^2 + 7x - 6$ (a) 3

2. دو درجی کثیررتبی کا درجہ ہوتا ہے۔ (b) 4

(a) 0

(b) 1

(c) 2

(d) 3

3. $P(x) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 30x - 14$ (a) 4

4. $P(x) = x^3 - 10x^2 + 7x + 6$ (a) 3

(a) 0

(b) 1

(c) 2

(d) 3

2. $P(x) = x^4 + 4x^3 - 9x^2 + 10x + 4$ (a) 4

II- درجہ بابت سوال کی شکل پر دائرہ لگائیے۔

4. $(x+3)^2 - 4$ کی تجزی ہے۔

(a) $(x+1)(x+5)$

(b) $(x-1)(x+5)$

(c) $(x+1)(x-5)$

(d) $(x-1)(x-5)$

5. $x^4 - 16$ کی تجزی ہے۔ (a) $(x+1)(x+5)$

(c) $(x+1)(x-5)$

(d) $(x-1)(x-5)$

6. $x^3 - y^3$ کی تجزی ہے۔ (a) $(x+1)(x+5)$

(c) $(x+1)(x-5)$

(d) $(x-1)(x-5)$

7. $a^4 - 1$ کی تجزی ہے۔ (a) $(x+1)(x+5)$

(c) $(x+1)(x-5)$

(d) $(x-1)(x-5)$

8. اگر کثیررتبی $P(x)$ جس کا درجہ $n \geq 1$ ہے کو کثیررتبی $x-a$ سے تقسیم کیا جائے جبکہ a ایک مستقل مقدار ہے۔

(c) $(x+1)(x-5)$

(d) $(x-1)(x-5)$

9. $x^4 - 16$ کی تجزی ہے۔ (a) $(x+1)(x+5)$

(c) $(x+1)(x-5)$

(d) $(x-1)(x-5)$

10. $(x-4)(x+4)$ (a) $(x+1)(x+5)$

(c) $(x+1)(x-5)$

(d) $(x-1)(x-5)$

11. $(x-2)(x+2)(x^2+4)$ (a) $(x+1)(x+5)$

(c) $(x+1)(x-5)$

(d) $(x-1)(x-5)$

12. $(x-y)(x^2+xy+y^2)$ (a) $(x+1)(x+5)$

(c) $(x+1)(x-5)$

(d) $(x-1)(x-5)$

13. $(x-y)(x^2+xy+y^2)$ (a) $(x+1)(x+5)$

(c) $(x+1)(x-5)$

(d) $(x-1)(x-5)$

14. $(x-y)(x^2+xy+y^2)$ (a) $(x+1)(x+5)$

(c) $(x+1)(x-5)$

(d) $(x-1)(x-5)$

15. $(x-y)(x^2+xy+y^2)$ (a) $(x+1)(x+5)$

(c) $(x+1)(x-5)$

(d) $(x-1)(x-5)$

16. $(x-y)(x^2+xy+y^2)$ (a) $(x+1)(x+5)$

(c) $(x+1)(x-5)$

(d) $(x-1)(x-5)$

17. $(x-y)(x^2+xy+y^2)$ (a) $(x+1)(x+5)$

(c) $(x+1)(x-5)$

(d) $(x-1)(x-5)$

18. $(x-y)(x^2+xy+y^2)$ (a) $(x+1)(x+5)$

(c) $(x+1)(x-5)$

(d) $(x-1)(x-5)$

19. $(x-y)(x^2+xy+y^2)$ (a) $(x+1)(x+5)$

(c) $(x+1)(x-5)$

(d) $(x-1)(x-5)$

20. $(x-y)(x^2+xy+y^2)$ (a) $(x+1)(x+5)$

(c) $(x+1)(x-5)$

(d) $(x-1)(x-5)$

21. $(x-y)(x^2+xy+y^2)$ (a) $(x+1)(x+5)$

(c) $(x+1)(x-5)$

(d) $(x-1)(x-5)$

22. $(x-y)(x^2+xy+y^2)$ (a) $(x+1)(x+5)$

(c) $(x+1)(x-5)$

(d) $(x-1)(x-5)$

23. $(x-y)(x^2+xy+y^2)$ (a) $(x+1)(x+5)$

(c) $(x+1)(x-5)$

(d) $(x-1)(x-5)$

24. $(x-y)(x^2+xy+y^2)$ (a) $(x+1)(x+5)$

(c) $(x+1)(x-5)$

(d) $(x-1)(x-5)$

25. $(x-y)(x^2+xy+y^2)$ (a) $(x+1)(x+5)$

(c) $(x+1)(x-5)$

(d) $(x-1)(x-5)$

26. $(x-y)(x^2+xy+y^2)$ (a) $(x+1)(x+5)$

(c) $(x+1)(x-5)$

(d) $(x-1)(x-5)$

27. $(x-y)(x^2+xy+y^2)$ (a) $(x+1)(x+5)$

(c) $(x+1)(x-5)$

(d) $(x-1)(x-5)$

28. $(x-y)(x^2+xy+y^2)$ (a) $(x+1)(x+5)$

(c) $(x+1)(x-5)$

(d) $(x-1)(x-5)$

29. $(x-y)(x^2+xy+y^2)$ (a) $(x+1)(x+5)$

(c) $(x+1)(x-5)$

(d) $(x-1)(x-5)$

30. $(x-y)(x^2+xy+y^2)$ (a) $(x+1)(x+5)$

(c) $(x+1)(x-5)$

(d) $(x-1)(x-5)$

31. $(x-y)(x^2+xy+y^2)$ (a) $(x+1)(x+5)$

(c) $(x+1)(x-5)$

(d) $(x-1)(x-5)$

32. $(x-y)(x^2+xy+y^2)$ (a) $(x+1)(x+5)$

(c) $(x+1)(x-5)$

(d) $(x-1)(x-5)$

33. $(x-y)(x^2+xy+y^2)$ (a) $(x+1)(x+5)$

(c) $(x+1)(x-5)$

(d) $(x-1)(x-5)$

34. $(x-y)(x^2+xy+y^2)$ (a) $(x+1)(x+5)$

(c) $(x+1)(x-5)$

(d) $(x-1)(x-5)$

35. $(x-y)(x^2+xy+y^2)$ (a) $(x+1)(x+5)$

(c) $(x+1)(x-5)$

(d) $(x-1)(x-5)$

36. $(x-y)(x^2+xy+y^2)$ (a) $(x+1)(x+5)$

(c) $(x+1)(x-5)$

(d) $(x-1)(x-5)$

37. $(x-y)(x^2+xy+y^2)$ (a) $(x+1)(x+5)$

(c) $(x+1)(x-5)$

(d) $(x-1)(x-5)$

38. $(x-y)(x^2+xy+y^2)$ (a) $(x+1)(x+5)$

(c) $(x+1)(x-5)$

(d) $(x-1)(x-5)$

39. $(x-y)(x^2+xy+y^2)$ (a) $(x+1)(x+5)$

(c) $(x+1)(x-5)$

(d) $(x-1)(x-5)$

40. $(x-y)(x^2+xy+y^2)$ (a) $(x+1)(x+5)$

(c) $(x+1)(x-5)$

(d) $(x-1)(x-5)$

41. $(x-y)(x^2+xy+y^2)$ (a) $(x+1)(x+5)$

(c) $(x+1)(x-5)$

(d) $(x-1)(x-5)$

42. $(x-y)(x^2+xy+y^2)$ (a) $(x+1)(x+5)$

(c) $(x+1)(x-5)$

(d) $(x-1)(x-5)$

43. $(x-y)(x^2+xy+y^2)$ (a) $(x+1)(x+5)$

(c) $(x+1)(x-5)$

(d) $(x-1)(x-5)$

44. $(x-y)(x^2+xy+y^2)$ (a) $(x+1)(x+5)$

(c) $(x+1)(x-5)$

(d) $(x-1)(x-5)$

45. $(x-y)(x^2+xy+y^2)$ (a) $(x+1)(x+5)$

(c) $(x+1)(x-5)$

(d) $(x-1)(x-5)$

46. $(x-y)(x^2+xy+y^2)$ (a) $(x+1)(x+5)$

(c) $(x+1)(x-5)$

(d) $(x-1)(x-5)$

47. $(x-y)(x^2+xy+y^2)$ (a) $(x+1)(x+5)$

(c) $(x+1)(x-5)$

(d) $(x-1)(x-5)$

48. $(x-y)(x^2+xy+y^2)$ (a) $(x+1)(x+5)$

(c) $(x+1)(x-5)$

(d) $(x-1)(x-5)$

49. $(x-y)(x^2+xy+y^2)$ (a) $(x+1)(x+5)$

(c) $(x+1)(x-5)$

(d) $(x-1)(x-5)$

50. $(x-y)(x^2+xy+y^2)$ (a) $(x+1)(x+5)$

(c) $(x+1)(x-5)$

(d) $(x-1)(x-5)$

9. اگر $P(x) = x - a$ کا 7: وضری ہو تو $P(1)$ کا

(a) 0 (b) 1
جواب: (a) 0 (b) 1

10. اگر $P(x) = x^2 + 2x + 5$ ہو تو $P(1)$ کا

(a) 5 (b) -5
(c) -7 (d) 0

II- خالی جگہوں کو پُر کیجیے
1. $x^2 + 2x + 5$ کا درجہ ہوتا ہے

2. دو درجہ کی کثیررتی کا درجہ ہوتا ہے

3. $P(x)$ کا درجہ n ہے تو $P(1)$ کا

4. $x^2 - 9$ کی تجزی

5. $(x+2)^2 - 1$ کی تجزی

6. $x^3 + 8$ کی تجزی

7. $x^3 - 8$ کی تجزی

8. اگر $P(x) = x^4 + 3x^2 - 2x + 1$ ہو تو $P(1) =$

9. اگر $P(x) = x^3 + 3x^2 - 3x + 1$ ہو تو $P(-2) =$

10. اگر $P(x) = x^3 - a^3$ ہو تو $P(a) =$

SUMMARY خلاصہ

یک درجی کثیررتی: ایسی کثیررتی جس کا درجہ "1" ہو یک درجی کثیررتی کہلاتی ہے۔
 دو درجی کثیررتی: ایسی کثیررتی جس کا درجہ "2" ہو دو درجی کثیررتی کہلاتی ہے۔
 سہ درجی کثیررتی: ایسی کثیررتی جس کا درجہ "3" ہو سہ درجی کثیررتی کہلاتی ہے۔
 درج ذیل قسم کی کثیررتیوں کی تجزی کرنا۔

$$kx + ky + kz, ax + ay + bx + by, a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2, (a^2 \pm 2ab + b^2) - c^2, a^4 + a^2b^2 + b^4 \text{ یا } a^4 + 4b^4,$$

$$x^2 + px + q, ax^2 + bx + c,$$

$$a^3 + 3a^2bx + 3ab^2 + b^3, a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,$$

$$a^3 \pm b^3.$$

مسئلہ باقی: اگر $P(x)$ کثیررتی جس کا درجہ $n \geq 1$ ہو تو کثیررتی ' $x-a$ ' سے تقسیم کیا جائے جبکہ ' a ' کوئی مستقل ہے،
 تو باقی $P(a)$ ہوگا۔

مسئلہ تجزی: اگر کثیررتی $P(x)$ کو ' $x-a$ ' سے تقسیم کیا جائے کہ $P(a) = 0$ تو ' $x-a$ '، $P(x)$ کا جزو ضربی ہوتا ہے۔

ALGEBRAIC MANIPULATION

الجبری مہارت

L.C.M اور H.C.F ◀

الجبری کسور پر بنیادی عوامل ◀

الجبری کسور کا جذر ◀

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

- ◀ الجبری جملوں کا عدا عظم HCF اور ذواضعاف اقل (LCM) معلوم کر سکیں۔
- ◀ تجزی یا تقسیم کے طریقہ سے عدا عظم اور ذواضعاف اقل معلوم کر سکیں۔
- ◀ عدا عظم اور ذواضعاف اقل میں تعلق جان سکیں۔
- ◀ کسری جملوں جن میں $+$ ، $-$ ، $\times$ ، $\div$ کو استعمال کیا گیا کو HCF اور LCM کی مدد سے مختصر کر سکیں۔
- ◀ الجبری جملوں کا جذر بذریعہ تجزی اور تقسیم معلوم کر سکیں۔

3.1 عا د اعظم (HCF) اور ذواضعاف اقل (LCM)

HIGHEST COMMON FACTOR (HCF) AND LEAST COMMON MULTIPLE (LCM)

3.1.1 عا د اعظم (HCF) اور ذواضعاف اقل (LCM)

دو یا دو سے زیادہ الجبری جملوں کا عا د اعظم ایک بڑے سے بڑے درجے کا ایسا مشترکہ جملہ ہوتا ہے جو کہ ان میں سے ہر ایک جملے کو بغیر ”باقی“ کے پورا پورا تقسیم کرتا ہے۔

▶ عا د اعظم کا اختصار HCF ہے۔

ہم دو یا دو سے زیادہ الجبری جملوں کا عا د اعظم (HCF) درج ذیل طریقوں سے معلوم کر سکتے ہیں:

- ▶ (i) بذریعہ تجزی (ii) تقسیم کے عمل سے
- ▶ HCF BY FACTORIZATION
- ▶ بذریعہ تجزی عا د اعظم معلوم کرنا:
- ▶ بذریعہ تجزی عا د اعظم معلوم کرنے کا طریقہ درج ذیل مثالوں سے واضح کیا جاتا ہے۔
- ▶ مثال 1:-
- ▶ $12p^3q^2$ اور $8p^2qr^3$ کا عا د اعظم HCF معلوم کریں۔

حل:

$$12p^3q^2 = 2 \times 2 \times 3 \times p \times p \times p \times q \times q \quad \text{کی تجزی}$$

$$8p^2qr^3 = 2 \times 2 \times 2 \times p \times p \times q \times r \times r \times r \quad \text{کی تجزی}$$

$$4p^2q^3r = 2 \times 2 \times p \times p \times q \times q \times q \times r \quad \text{کی تجزی}$$

$$\text{مشترک اجزائے ضربی: } 2 \times 2 \times p \times p \times q$$

$$\text{پس } HCF = 4p^2q \quad \text{عا د اعظم}$$

مثال 2:-

2x² + 3x + 1 اور 2x² + 5x + 2 کا عظیم معلوم کریں

حل:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 3x + 1 &= 2x^2 + 2x + x + 1 \\ &= 2x(x+1) + 1(x+1) \\ &= (2x+1)(x+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x^2 + 5x + 2 &= 2x^2 + 4x + x + 2 \\ &= 2x(x+2) + 1(x+2) \\ &= (2x+1)(x+2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x^2 - x - 1 &= 2x^2 - 2x + x - 1 \\ &= 2x(x-1) + 1(x-1) \\ &= (2x+1)(x-1) \end{aligned}$$

$$\text{مشترک جزو ضربی} = 2x+1$$

$$\text{عظیم} = 2x+1 \quad \text{پس}$$

مثال 3:-

24(6x⁴ - x³ - 2x²) اور 20(2x⁶ + 3x⁵ + x⁴) کا عظیم معلوم کریں

$$P(x) = 24(6x^4 - x^3 - 2x^2) \quad \text{فرض کیا}$$

$$\begin{aligned} &= 24x^2(6x^2 - x - 2) \\ &= 24x^2[6x^2 - 4x + 3x - 2] \\ &= 24x^2[2x(3x-2) + 1(3x-2)] \end{aligned}$$

$$P(x) = 24x^2(2x+1)(3x-2) = 2^2 \times 2 \times 3 \times x^2(2x+1)(3x-2)$$

$$Q(x) = 20(2x^6 + 3x^5 + x^4) \quad \text{اور فرض کیا}$$

$$\begin{aligned} &= 20x^4[2x^2 + 3x + 1] \\ &= 20x^4(2x^2 + 2x + x + 1) \\ &= 20x^4[2x(x+1) + 1(x+1)] \\ &= 20x^4(x+1)(2x+1) \\ &= 2^2 \times 5 \times x^2 \times (x+1)(2x+1) \end{aligned}$$

$$\text{مشترک جزو ضربی} = 2^2 \times x^2 \times (2x+1)$$

$$\text{عظیم} = 4x^2(2x+1) \quad \text{پس}$$

مثال 4:-

کا عاذا عظم معلوم کریں $x^2 - 4$ اور $x^2 - 7x + 10$ ، $x^2 + x - 6$

حل:

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2) \text{ کے اجزائے ضربی}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 7x + 10 &= x^2 - 5x - 2x + 10 \\ &= x(x - 5) - 2(x - 5) \\ &= (x - 5)(x - 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 + x - 6 &= x^2 + 3x - 2x - 6 \\ &= x(x + 3) - 2(x + 3) \\ &= (x + 3)(x - 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{مشترک جزو ضربی} &= x - 2 \\ \text{عاذا عظم} &= x - 2 \text{ پس} \end{aligned}$$

مشق 3.1

تجزیی کے ذریعے عاذا عظم معلوم کریں۔

1. $abxy$, a^2bc

2. $6pqr$, $15qrs$

3. $3xy^2z^3$, $12x^2y^2z^2$

4. $14a^2bc$, $21ab^2$

5. $3x^5y^2$, $12x^2y^4$, $15x^3y^2$

6. $4abc^3$, $8a^3bc$, $6ab^3c$

7. $x^3 + 64$, $x^2 - 16$

8. $x^2 - y^2$, $x^4 - y^4$, $x^6 - y^6$

9. $t^2 - 9$, $(t + 3)^2$, $t^2 + t - 6$

10. $x^2 - x - 2$, $x^2 + x - 6$, $x^2 - 3x + 2$

11. $1 - x^2$, $x^3 + 1$, $1 - x - 2x^2$

12. $x^3 - 8$, $x^2 - 7x + 10$

13. $x^2 + 3x + 2$, $x^2 + 4x + 3$, $x^2 + 5x + 4$

14. $x^4 + x^3 - 6x^2$, $x^4 - 9x^2$, $x^3 + x^2 - 6x$

15. $35a^2c^3b$, $45a^3cb^2$, $30ac^2b^3$

بذریعہ تقسیم عاظم HCF معلوم کرنا HCF BY DIVISION METHOD

تقسیم کے قاعدے سے عاظم معلوم کرنے کے لیے دیے گئے جملوں کو ان کے مشترک متغیر کی قوت نماؤں کے لحاظ سے ترتیب نزولی میں لکھیے۔

بڑے درجے کی کثیررتی کو چھوٹے درجے کی کثیررتی سے تقسیم کیجیے اور باقی معلوم کیجیے۔ پہلے والے تقسیم کنندہ کو مقسوم علیہ بنا کر باقی کو تقسیم کنندہ بنا لیجیے اور تقسیم کر کے باقی معلوم کریں۔ اس عمل کو جاری رکھیں یہاں تک کہ صفر باقی نہ بچے۔ آخری تقسیم کنندہ مطلوبہ عاظم ہے۔

مثال 1:-

$(x^3 - x^2 + x - 1)$ ، $(x^3 - x^2 - 3x + 3)$ کا عاظم تقسیم کے قاعدہ سے معلوم کریں۔

حل:

$$\begin{array}{r} 1 \\ x^3 - x^2 + x - 1 \overline{) x^3 - x^2 - 3x + 3} \\ \underline{\pm x^3 \mp x^2 \pm x \mp 1} \\ -4x + 4 = -4(x - 1) \end{array}$$

$-4(x - 1)$ کو -4 سے تقسیم کرنے سے ہمیں $(x - 1)$ حاصل ہوا

$$\begin{array}{r} x^2 + 1 \\ x - 1 \overline{) x^3 - x^2 + x - 1} \\ \underline{\pm x^3 \mp x^2} \\ x - 1 \\ \underline{\pm x \mp 1} \\ 0 \end{array}$$

پس $x - 1 =$ عاظم

یاد رکھیے:

عاظم معلوم کرتے وقت کسی بھی کثیررتی کو کسی ہندسے سے ضرب دینے یا تقسیم کرنے سے عاظم متاثر نہیں ہوتا۔

مثال 2:-

بذریعہ تقسیم $5x^3 + 10x^2 - 3x - 6$ ، $2x^3 + 6x^2 + 5x + 2$ اور $3x^3 + 6x^2 + 2x + 4$ کا عاوا عظم معلوم کیجیے۔

حل:

$$\begin{array}{r} 5 \\ 2x^3 + 6x^2 + 5x + 2 \overline{) 5x^3 + 10x^2 - 3x - 6} \\ \times 2 \\ \hline 10x^3 + 20x^2 - 6x - 12 \\ \pm 10x^3 \pm 30x^2 \pm 25x \pm 10 \\ \hline -10x^2 - 31x - 22 \end{array}$$

اب $-10x^2 - 31x - 22$ کو -1 سے تقسیم کرنے سے ہمیں حاصل ہوا $(10x^2 + 31x + 22)$

$$\begin{array}{r} x - 1 \\ 10x^2 + 31x + 22 \overline{) 2x^3 + 6x^2 + 5x + 2} \\ \times 5 \\ \hline 10x^3 + 30x^2 + 25x + 10 \\ \pm 10x^3 \pm 31x^2 \pm 22x \\ \hline -x^2 + 3x + 10 \\ \times 10 \\ \hline -10x^2 + 30x + 100 \\ \pm 10x^2 \pm 31x \pm 22 \\ \hline 61x + 122 \end{array}$$

اب $61x + 122$ کو 61 سے تقسیم کرنے سے ہمیں حاصل ہوا $(x + 2)$

$$\begin{array}{r} 10x + 11 \\ x + 2 \overline{) 10x^2 + 31x + 22} \\ \pm 10x^2 \pm 20x \\ \hline 11x + 22 \\ \pm 11x \pm 22 \\ \hline 0 \end{array}$$

مشق 3.2

تقسیم کے طریقہ سے عا داً عظم HCF معلوم کریں۔

1. $x^4 + x^2 + 1$, $x^4 + x^3 + x + 1$
2. $6x^3 + 7x^2 - 9x + 2$, $8x^4 + 6x^3 - 15x^2 + 9x - 2$
3. $4x^3 + 2x^2 - 6x$, $4x^3 - 8x + 4$
4. $x^3 + 7x^2 + 12x$, $x^3 - 2x^2 - 15x$
5. $x^3 - x^2 - x + 1$, $x^4 - 2x^3 + 2x - 1$
6. $x^3 - x^2 - x - 2$, $x^3 + 3x^2 - 6x - 8$
7. $x^2 + 3x - 4$, $x^3 - 2x^2 - 2x + 3$
8. $3x^3 - 14x^2 + 9x + 10$, $15x^3 - 34x^2 + 21x - 10$
9. $2x^4 + x^3 + 4x + 2$, $6x^3 + 5x^2 + x$, $2x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x + 1$
10. $x^3 + x^2 - 5x + 3$, $x^3 - 7x + 6$, $x^3 + 2x^2 - 2x + 3$

3.1.2 ذواضعاف اقل (LCM) Least Common Multiple (LCM)

دو یا دو سے زیادہ الجبری جملوں کا ذواضعاف اقل ایک کم ترین درجہ کا ایسا جملہ ہوتا ہے جو ان سب جملوں سے بغیر ”باقی“ کے پورا پورا تقسیم ہو سکے۔

ذواضعاف اقل کا مخفف LCM ہے۔

ہم ذواضعاف اقل بذریعہ تجزی معلوم کر سکتے ہیں

LCM BY FACTORIZATION LCM معلوم کرنا

بذریعہ تجزی LCM معلوم کرنے کے لیے درج ذیل مثالوں پر غور کیجیے۔

مثال 1:- $4p^2q^3r$ ، $8p^2qr^3$ اور $12p^3q^2$ کا ذواضعاف اقل معلوم کریں

حل:

کی تجزی $12p^3q^2 = 2 \times 2 \times 3 \times p \times p \times p \times q \times q$

کی تجزی $8p^2qr^3 = 2 \times 2 \times 2 \times p \times p \times q \times r \times r \times r$

کی تجزی $4p^2q^3r = 2 \times 2 \times p \times p \times q \times q \times q \times r$

غیر مشترک اجزائے ضربی کا حاصل ضرب $\times$ مشترک اجزائے ضربی کا حاصل ضرب = ذواضعاف اقل

$$= (2^2 \times p^2 \times q^2 \times r) \times (2 \times 3 \times p \times q \times r^2)$$

$$= 4p^2q^2r \times 6pqr^2$$

$$= 4 \times 6 \times p^2 \times p \times q^2 \times q \times r \times r^2$$

$$\text{ذواضعاف اقل} = 24p^3q^3r^3$$

یاد رکھیے:

مشترک اجزائے ضربی کا حاصل ضرب لیتے وقت مشترک اجزائے ضربی کو بار بار شمار نہیں کرتے۔

مثال 2:- $24ab^2c^2$ ، $6ab^2c^3$ اور $18ab^2c^3$ کا ذواضعاف اقل معلوم کریں۔

حل:

کی تجزی $18ab^2c^3 = 2 \times 3 \times 3 \times a \times b \times b \times c \times c \times c$

کی تجزی $6a^2bc^3 = 2 \times 3 \times a \times a \times b \times c \times c \times c$

کی تجزی $24ab^2c^2 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times a \times b \times b \times c \times c$

غیر مشترک اجزائے ضربی کا حاصل ضرب $\times$ مشترک اجزائے ضربی کا حاصل ضرب = ذواضعاف اقل

$$= (2 \times 3 \times a \times b^2 \times c^3) \times (2 \times 2 \times 3 \times a)$$

$$= (6ab^2c^3) \times (12a)$$

$$\text{ذواضعاف اقل} = 72a^2b^2c^3$$

مثال 3:- $x^2 - 4x - 21$ اور $x^2 - 49$ کا ذواضعاف اقل معلوم کریں۔

حل:

$$x^2 - 49 = x^2 - 7^2$$

$$= (x - 7) (x + 7)$$

$$x^2 - 4x - 21 = x^2 - 7x + 3x - 21 \quad \text{اور}$$

$$= x(x - 7) + 3(x - 7)$$

$$= (x - 7) (x + 3)$$

$$\text{مشترک جزو ضربی} = x - 7$$

$$\text{غیر مشترک اجزائے ضربی کا حاصل ضرب} = (x + 7) (x + 3)$$

$$\text{غیر مشترک اجزائے ضربی کا حاصل ضرب} \times \text{مشترک جزو ضربی} = \text{ذواضعاف اقل}$$

$$\text{ذواضعاف اقل} = (x - 7) \times (x + 7) (x + 3)$$

$$= (x^2 - 7^2) (x + 3)$$

$$= (x^2 - 49) (x + 3)$$

$$\text{ذواضعاف اقل} = x^3 + 3x^2 - 49x - 147$$

مشق 3.3

بذریعہ تجزی ذواضعاف اقل LCM معلوم کیجیے۔

1. $21a^4x^3y$, $35a^2x^4y$, $28a^3xy^4$

2. $3a^4b^2c^3$, $5a^2b^3c^5$

3. $2ab$, $3ab$, $4ca$

4. x^2yz , xy^2z , xyz^2

5. $p^3q - pq^3$, $p^5q^2 - p^2q^5$

6. $x^3 + 64$, $x^2 - 16$

7. $x^2 - x - 2$, $x^2 + x - 6$, $x^2 - 3x + 2$

8. $y^2 - 9$, $(y + 3)^2$, $y^2 + y - 6$

9. $1 - y^2$, $y^3 + 1$, $1 - y - 2y^2$

10. $x^2 - y^2$, $x^4 - y^4$, $x^6 - y^6$

11. $x^3 + 1$, $x^4 + x^2 + 1$, $(x^2 + x + 1)^2$

12. $x^3 + y^3$, $x^4 - y^4$, $x^6 + y^6$

13. $2x^2 + 5x + 3$, $x^2 + 2x + 1$, $2x^2 + 9x + 9$

14. $x^4 + x^3 - 6x^2$, $x^4 - 9x^2$, $x^3 + x^2 - 6x$

15. $x^2 + 4xy + 4y^2$, $x^2 + 3xy + 2y^2$, $x^2 + 2xy + y^2$

Relationship Between HCF and LCM

3.1.3 عاذا عظم اور ذواضعاف اقل کا باہمی تعلق

A اور B کوئی سے دو الجبری جملے ہوں اور HCF اور LCM کو بالترتیب H اور L سے ظاہر کیا جائے تو ان کے درمیان تعلق کو یوں لکھا جاسکتا ہے۔

$$A \times B = H \times L$$

یہ عاذا عظم اور ذواضعاف اقل کے درمیان کلیہ کہلاتا ہے۔

ثبوت: فرض کیا

$$\frac{A}{H} = x \quad \text{اور} \quad \frac{B}{H} = y$$

$$A = Hx \quad \dots\dots\dots (i)$$

$$B = Hy \quad \dots\dots\dots (ii)$$

چونکہ x اور y میں کوئی جزو ضربی مشترک نہیں

$$L = H \cdot x \cdot y \quad \text{لہذا}$$

$$HL = H(H \cdot x \cdot y) \quad (\text{دونوں اطراف H سے ضرب دینے سے})$$

$$= (Hx) \cdot (Hy)$$

$$HL = A \cdot B.$$

اہم نتائج:

$$(i) \quad L = \frac{A \times B}{H}$$

$$(ii) \quad H = \frac{A \times B}{L}$$

$$(iii) \quad A = \frac{H \times L}{B}$$

نوٹ:

اگر A اور B دو الجبری جملے ہوں تو ہم ذواضعاف اقل معلوم کرنے سے پہلے عاذا عظم معلوم کرتے ہیں۔

اگر دو الجبری جملوں کا عاذا عظم معلوم ہو تو ہم ان کا ذواضعاف اقل معلوم کر سکتے ہیں۔

مثال 1:-

دو الجبری جملوں کے ذواضعاف اقل اور عاذا عظم بالترتیب $(x^2 - 1)$ اور $(2x + 1)$ ہیں۔ اگر ایک جملہ $(x - 1)(2x + 1)$ ہو تو دوسرا جملہ معلوم کریں۔

حل:

$$L = (2x + 1)(x^2 - 1)$$

$$H = 2x + 1$$

$$A = (x - 1)(2x + 1)$$

$$B = ?$$

$$A \times B = H \times L \quad \text{ہم جانتے ہیں کہ}$$

$$B = \frac{H \times L}{A}$$

$$= \frac{(2x + 1)(x^2 - 1)(2x + 1)}{(x - 1)(2x + 1)}$$

$$= \frac{(2x + 1)(x + 1)(x - 1)(2x + 1)}{(x - 1)(2x + 1)}$$

$$B = (2x + 1)(x + 1)$$

مثال 2:-

اگر دو جملوں کا عاذا عظم، $(x + 3)$ اور ان کا ذواضعاف اقل، $x^3 - 7x + 6$ ہو تو دوسرا جملہ معلوم کریں جبکہ پہلا جملہ $(x^2 + 2x - 3)$ ہے۔

حل: فرض کیا مطلوبہ جملہ B ہے۔ تو

$$A \times B = H \times L$$

$$B = \frac{H \times L}{A}$$

$$= \frac{(x + 3)(x^3 - 7x + 6)}{x^2 + 2x - 3}$$

$$= (x + 3)(x - 2)$$

$$B = x^2 + x - 6$$

$$\begin{array}{r} x - 2 \\ x^2 + 2x - 3 \overline{) x^3 - 7x + 6} \\ \underline{-x^3 + 3x} \quad \pm 2x^2 \\ -2x^2 - 4x + 6 \\ \underline{+ 2x^2 + 4x \pm 6} \\ 0 \end{array}$$

مثال 3:-

دو جملوں کا حاصل ضرب $x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 20x + 48$ ہے۔ اور ان کا ذواضعاف اقل $x^3 + 5x^2 - 2x - 24$ ہے۔ ان کا عاوا عظم معلوم کیجیے۔

حل: $A \times B = x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 20x + 48$ دیا گیا ہے کہ

$$L = x^3 + 5x^2 - 2x - 24$$

$$H = ?$$

$$L \times H = A \times B$$

$$H = \frac{A \times B}{L}$$

$$H = \frac{x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 20x + 48}{x^3 + 5x^2 - 2x - 24}$$

$$\begin{array}{r} x-2 \\ x^3 + 5x^2 - 2x - 24 \overline{) x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 20x + 48} \\ \underline{\pm x^4 \pm 5x^3 \mp 2x^2 \mp 24x} \\ -2x^3 - 10x^2 + 4x + 48 \\ \underline{\mp 2x^3 \mp 10x^2 \pm 4x \pm 48} \\ 0 \end{array}$$

$$\therefore \text{عاوا عظم} = x - 2$$

یاد رکھیے کہ: عاوا عظم $\times$ ذواضعاف اقل = دو الجبری جملوں کا حاصل ضرب

$$\text{ذواضعاف اقل} = \frac{\text{دونوں الجبری جملوں کا حاصل ضرب}}{\text{عاوا عظم}}$$

$$\text{عاوا عظم} = \frac{\text{دونوں الجبری جملوں کا حاصل ضرب}}{\text{ذواضعاف اقل}}$$

مشق 3.4

درج ذیل کا عاوا عظم اور ذواضعاف اقل معلوم کیجیے۔

1. $x^3 + x^2 + x + 1$, $x^3 - x^2 + x - 1$
2. $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$, $x^3 - x^2 - 4x + 4$
3. $2x^3 + 2x^2 + x + 1$, $2x^3 - 2x^2 + x - 1$
4. $6x^3 + 7x^2 - 9x + 2$, $8x^4 + 6x^3 - 15x^2 + 9x - 2$
5. $3x^4 + 17x^3 + 27x^2 + 7x - 6$, $6x^4 + 7x^3 - 27x^2 + 17x - 3$
6. $2x^4 + 3x^3 - 13x^2 - 7x + 15$, $2x^4 + x^3 - 20x^2 - 7x + 24$
7. $x^4 - x^3 - x + 1$, $x^4 + x^3 - x - 1$
8. $x^4 + x^3 + x + 1$, $x^4 + x^3 - x - 1$

مطلوبہ کثیر رقمی معلوم کیجیے۔

9. $A = x^2 - 5x - 14$, $H = x - 7$, $L = x^3 - 10x^2 + 11x + 70$, $B = ?$
10. $B = 3x^2 + 14x + 8$, $H = 3x + 2$, $L = 6x^3 + 25x^2 + 2x - 8$, $A = ?$
11. دو کثیر رقمیوں کا حاصل ضرب $x^4 + 6x^3 - 3x^2 - 56x - 48$ ہے اور ان کا عاوا عظم $x^3 + 2x^2 - 11x - 12$ ہے۔ ذواضعاف اقل معلوم کیجیے۔
12. دو کثیر رقمیوں کے حاصل ضرب اور $L.C.M$ بالترتیب $x^4 + 5x^3 - x^2 - 17x + 12$ اور $x^3 + 6x^2 + 5x - 12$ ہیں۔ ان کا $H.C.F$ معلوم کیجیے۔
13. دو کثیر رقمیوں کے حاصل ضرب اور ذواضعاف اقل بالترتیب $x^4 - 12x^3 + 53x^2 - 102x + 72$ اور $x - 3$ ہیں۔ ان کا عاوا عظم معلوم کیجیے۔
14. دو کثیر رقمیوں کے حاصل ضرب اور عاوا عظم بالترتیب $x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 20x - 24$ اور $x + 2$ ہیں۔ ان کا ذواضعاف اقل معلوم کیجیے۔
15. ایک جملہ $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ ہے۔ جبکہ دوسرا جملہ $x^3 + 5x^2 - 4x - 20$ ہے۔ ان کا عاوا عظم $x^2 - 4$ ہے۔ ان کا ذواضعاف اقل معلوم کیجیے۔
16. ایک الجبری جملہ $x^3 - x^2 + 2x - 2$ اور دوسرا جملہ $x^3 - x^2 - 2x + 2$ ہے۔ ان کا عاوا عظم $x - 1$ ہے۔ ان کا ذواضعاف اقل معلوم کیجیے۔
17. ثابت کیجیے کہ $H^3 + L^3 = A^3 + B^3$ جبکہ $H + L = A + B$ اور L بالترتیب عاوا عظم اور ذواضعاف اقل کو ظاہر کرتے ہیں اور A اور B بالترتیب کثیر رقمیاں ہیں۔

3.2 الجبری کسور پر بنیادی عوامل

BASIC OPERATIONS ON THE ALGEBRAIC FRACTIONS

Addition and Subtraction of the Algebraic Fractions

3.2.1 الجبری جملوں کی جمع اور تفریق

الجبری جملوں کی جمع اور تفریق کی وضاحت درج ذیل مثالوں سے کی جاتی ہے۔

مثال 1:- مختصر کیجیے۔

$$\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 2x - 8} + \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 12} - \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 6x + 8}$$

$$\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 2x - 8} + \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 12} - \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 6x + 8} \quad \text{حل:}$$

$$= \frac{x^2 + 2x + x + 2}{x^2 - 4x + 2x - 8} + \frac{x^2 - 3x - 2x + 6}{x^2 - 4x - 3x + 12} - \frac{x^2 + 3x - 2x - 6}{x^2 - 4x - 2x + 8}$$

$$= \frac{(x+2)(x+1)}{(x-4)(x+2)} + \frac{(x-3)(x-2)}{(x-4)(x-3)} - \frac{(x+3)(x-2)}{(x-4)(x-2)}$$

$$= \frac{x+1}{x-4} + \frac{x-2}{x-4} - \frac{x+3}{x-4}$$

$$= \frac{x+1+x-2-x-3}{x-4}$$

$$= \frac{x-4}{x-4} = 1$$

یاد رکھیے:

- (i) الجبری کسور میں نسب نما اور مخرج، کثیر رقمیاں ہوتی ہیں۔
(ii) جب ہم ان کسور کو جمع یا تفریق کرتے ہیں تو پہلے ہم انہیں مختصر ترین شکل میں تبدیل کر لیتے ہیں

مثال 2:- مختصر کریں

$$\frac{a+b}{a^2+ab+b^2} + \frac{1}{a-b} - \frac{ab}{a^3-b^3}$$

$$\frac{a+b}{a^2+ab+b^2} + \frac{1}{a-b} - \frac{ab}{a^3-b^3} \quad \text{حل:-}$$

$$= \frac{(a-b)(a+b) + 1(a^2+ab+b^2) - ab}{a^3-b^3}$$

$$= \frac{a^2-b^2+a^2+ab+b^2-ab}{a^3-b^3}$$

$$= \frac{2a^2}{a^3-b^3}$$

3.2.2 الجبری کسور کی ضرب اور تقسیم

Multiplication and Division of the Algebraic Fractions

اگر P, Q, R, S الجبری جملے ہوں تو $\frac{P}{Q}$ اور $\frac{R}{S}$ الجبری کسور کہلاتی ہیں جبکہ $Q \neq 0$, $S \neq 0$ ۔

الجبری کسور کی ضرب

$$\frac{P}{Q} \times \frac{R}{S} = \frac{PR}{QS} \quad \text{جبکہ } Q \neq 0, S \neq 0.$$

الجبری کسور کی تقسیم

$$\begin{aligned} \frac{P}{Q} \div \frac{R}{S} &= \frac{P}{Q} \times \frac{S}{R} \\ &= \frac{PS}{QR} \quad \text{جبکہ } Q \neq 0, S \neq 0. \end{aligned}$$

مثال 1:- مختصر کیجیے۔

$$\frac{b^2 - c^2 - a^2 + 2ac}{c^2 + a^2 - b^2 + 2ac} \times \frac{b^2 + c^2 - a^2 - 2bc}{a^2 - b^2 + c^2 - 2ac}$$

حل:

$$\frac{b^2 - c^2 - a^2 + 2ac}{c^2 + a^2 - b^2 + 2ac} \times \frac{b^2 + c^2 - a^2 - 2bc}{a^2 - b^2 + c^2 - 2ac}$$

$$= \frac{b^2 - (c^2 + a^2 - 2ac)}{(c^2 + a^2 + 2ac) - b^2} \times \frac{(b^2 + c^2 - 2bc) - a^2}{(a^2 + c^2 - 2ac) - b^2}$$

$$= \frac{b^2 - (a - c)^2}{(a + c)^2 - b^2} \times \frac{(b - c)^2 - a^2}{(a - c)^2 - b^2}$$

$$= \frac{[b^2 - (a - c)^2]}{(a + c - b)(a + c + b)} \times \frac{(b - c - a)(b - c + a)}{(-1)[b^2 - (a - c)^2]}$$

$$= \frac{-(b - c - a)(b - c + a)}{(a + c - b)(a + b + c)}$$

$$= \frac{(a + c - b)(a + b - c)}{(a + c - b)(a + b + c)} = \frac{a + b - c}{a + b + c}$$

مثال 2:- مختصر کیجیے۔

$$\frac{a^3 - b^3}{a^4 - b^4} \div \frac{a^2 + ab + b^2}{a^2 + b^2}$$

حل:

$$\frac{a^3 - b^3}{a^4 - b^4} \div \frac{a^2 + ab + b^2}{a^2 + b^2}$$

$$= \frac{a^3 - b^3}{a^4 - b^4} \times \frac{a^2 + b^2}{a^2 + ab + b^2}$$

$$= \frac{(a - b)(a^2 + ab + b^2)}{(a^2 + b^2)(a + b)(a - b)} \times \frac{a^2 + b^2}{a^2 + ab + b^2}$$

$$= \frac{1}{a + b}$$

مشق 3.5

مختصر کیجیے۔

$$1. \frac{1}{a} + \frac{2}{a+1} - \frac{3}{a+2}$$

$$2. \frac{2a}{(x-2a)} - \frac{x-a}{x^2-5ax+6a^2} + \frac{2}{x-3a}$$

$$3. \frac{1}{a^2+1} - \frac{a^4}{a^2+1} + \frac{a^6}{a^2-1} - \frac{1}{a^2-1}$$

$$4. \frac{1}{x^2+x+1} - \frac{1}{x^2-x+1} + \frac{2x+1}{x^4+x^2+1}$$

$$5. \frac{a^2(b-c)}{(a+b)(a+c)} - \frac{b^2(c-a)}{(b+c)(b+a)} + \frac{c^2(a-b)}{(c+a)(c+b)}$$

$$6. \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{x+2}{x^2+x+1} - \frac{x-2}{x^2-x+1}$$

$$7. \frac{a^2+ab+b^2}{a+b} + \frac{a^2-ab+b^2}{a-b}$$

$$8. \frac{x^4-y^4}{x^2-2xy+y^2} \times \frac{x-y}{x(x+y)} \div \frac{x^2+y^2}{x}$$

$$9. \frac{x^2-1}{x^2+x-2} \times \frac{x^3+8}{x^4+4x^2+16} \div \frac{x^2+x}{x^3+2x^2+4x}$$

$$10. \frac{a^3+64b^3}{a^2+20ab+64b^2} \div \frac{a^2-4ab+16b^2}{a^2+4ab+16b^2} \times \frac{a^2+12ab-64b^2}{a^3-64b^3}$$

$$11. \frac{a}{(a+b)^2-2ab} \times \frac{a^4-b^4}{(a+b)^3-3ab(a+b)} \div \frac{(a+b)^2-4ab}{(a+b)^2-3ab}$$

$$12. \frac{a^2-1}{a^2-a-2} \div \frac{a^2+5a+6}{a^2-5a+6} \div \frac{a^2-4a+3}{a^2+4a+3}$$

3.3 الجبری جملوں کا جذر SQUARE ROOT OF ALGEBRAIC EXPRESSION

ہم الجبری جملوں کا جذر معلوم کر سکتے ہیں۔

(i) تجزی کے طریقہ سے

(ii) تقسیم کے طریقہ سے

3.3.1 تجزی کے طریقہ سے جذر معلوم کرنا Square Root By Factorization Method

ہم اس طریقہ میں جملے کو مکمل مربع کی صورت میں ظاہر کر کے جذر معلوم کرتے ہیں۔

مثلاً

$$x^2 \pm 2xy + y^2 = (x \pm y)^2$$

$$\text{یا } x^2 \pm 2xy + y^2 = [\pm(x \pm y)]^2$$

$$\text{یا } \sqrt{x^2 \pm 2xy + y^2} = \pm(x \pm y)$$

پس الجبری جملے کا جذر دو ایسے جملوں پر مشتمل ہوتا ہے۔ جو ایک دوسرے کے جمعی معکوس ہوتے ہیں۔

مثال 1:-

$$49x^2 + 112xy + 64y^2 \text{ کا تجزی کے طریقہ سے جذر معلوم کیجیے۔}$$

$$\text{حل: } 49x^2 + 112xy + 64y^2$$

$$= (7x)^2 + 2(7x)(8y) + (8y)^2$$

$$= (7x + 8y)^2$$

$$49x^2 + 112xy + 64y^2 = [\pm(7x + 8y)]^2$$

دونوں طرف جذر المربع سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\sqrt{49x^2 + 112xy + 64y^2} = \pm(7x + 8y)$$

مثال 2:-

کا جذر معلوم کریں۔ $(x^2 + \frac{1}{x^2}) + 10(x + \frac{1}{x}) + 27$

$$x + \frac{1}{x} = z,$$

حل: فرض کیا کہ

$$(x + \frac{1}{x})^2 = z^2$$

دونوں طرف مربع لینے سے

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = z^2$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2$$

$$\therefore (x^2 + \frac{1}{x^2}) + 10(x + \frac{1}{x}) + 27 = z^2 - 2 + 10z + 27$$

$$= z^2 + 10z + 25$$

$$= (z)^2 + 2(z)5 + (5)^2$$

$$= (z + 5)^2 \quad \left[z = x + \frac{1}{x} \text{ رکھتے ہیں} \right]$$

$$= (x + \frac{1}{x} + 5)^2$$

$$(x^2 + \frac{1}{x^2}) + 10(x + \frac{1}{x}) + 27 = \left[\pm(x + \frac{1}{x} + 5) \right]^2$$

دونوں طرف جذر المربع لینے سے

$$\sqrt{(x^2 + \frac{1}{x^2}) + 10(x + \frac{1}{x}) + 27} = \pm(x + \frac{1}{x} + 5)$$

مثال 3:-

کا جذر معلوم کریں۔ $x(x-1)(x-2)(x-3)+1$

حل:

$$x(x-1)(x-2)(x-3)+1$$

$$= [x(x-3)] [(x-1)(x-2)] + 1$$

$$= [x^2 - 3x] [x^2 - 3x + 2] + 1$$

$$x^2 - 3x = z \quad \text{رکھتے ہیں}$$

$$x(x-1)(x-2)(x-3)+1 = z(z+2)+1$$

$$= z^2 + 2z + 1$$

$$= (z+1)^2$$

$$z = x^2 - 3x \quad \text{اب رکھیے}$$

$$x(x-1)(x-2)(x-3)+1 = (x^2 - 3x + 1)^2$$

$$= [\pm(x^2 - 3x + 1)]^2$$

دونوں طرف جذر المربع لینے سے

$$\sqrt{x(x-1)(x-2)(x-3)+1} = \pm(x^2 - 3x + 1)$$

مثال 4:-

کا جذر معلوم کیجیے۔ $(\frac{x}{y} + \frac{y}{x})^2 - 4(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}), (x \neq 0, y \neq 0)$

$$\frac{x}{y} - \frac{y}{x} = z$$

حل: فرض کیا کہ

$$(\frac{x}{y} - \frac{y}{x})^2 = z^2$$

دونوں طرف مربع لینے سے

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} - 2 = z^2$$

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = z^2 + 2$$

$$(\frac{x}{y} + \frac{y}{x})^2 - 4(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}) = (\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 2) - 4(\frac{x}{y} - \frac{y}{x})$$

$$= z^2 + 2 + 2 - 4z$$

$$= z^2 - 4z + 4$$

$$= (z - 2)^2$$

$$= [\pm(z - 2)]^2 \quad \left[\frac{x}{y} - \frac{y}{x} = z \text{ رکھتے سے} \right]$$

$$(\frac{x}{y} + \frac{y}{x})^2 - 4(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}) = \left[\pm(\frac{x}{y} - \frac{y}{x} - 2) \right]^2$$

دونوں طرف جذر المربع لینے سے

$$\sqrt{(\frac{x}{y} + \frac{y}{x})^2 - 4(\frac{x}{y} - \frac{y}{x})} = \pm(\frac{x}{y} - \frac{y}{x} - 2)$$

3.3.2 جذر بذریعہ طریقہ تقسیم معلوم کرنا Square Root by Division Method

ہم مندرجہ ذیل مثالوں سے بذریعہ طریقہ تقسیم جذر معلوم کرنے کی وضاحت کرتے ہیں۔

مثال 1:-

کا جذر معلوم کیجیے۔ $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz$

حل:

$$\begin{array}{r}
 x + y + z \\
 x \overline{) x^2 + 2xy + 2xz + 2yz + y^2 + z^2} \\
 \underline{\pm x^2} \\
 2x + y \\
 \underline{\pm 2xy} \\
 2x + 2y + z \\
 \underline{\pm 2xz \pm 2yz \pm z^2} \\
 0
 \end{array}$$

مطلوبہ جذر المربع $\pm (x + y + z)$

(i) دیئے گئے جملے کو ترتیب نزولی میں لکھیے۔

پہلی رقم x^2 کا جذر المربع x لیجیے۔

جملے میں تفریق کرنے کے بعد $2xy + 2xz + 2yz + y^2 + z^2$ باقی بچتا ہے۔

(ii) حاصل قسمت x کو اس کے دوگنا $2x$ کو y سے ضرب دیجئے جو کہ باقی بچے کی پہلی رقم $2xy$ ہے۔

لہذا باقی بچے کو $2x + y$ سے تقسیم کیجیے تو ہمیں $2xz + 2yz + z^2$ نیا باقی بچتا ہے اور

$x + y$ حاصل قسمت ہوتے ہیں۔ جو کہ جذر المربع کی پہلی دو رقم ہیں۔

(iii) باقی بچے ہوئے کو حاصل قسمت کے دوگنا z سے تقسیم کیجیے۔ یعنی $2x + 2y + z$ تو حاصل قسمت

$x + y + z$ حل ہوا اور باقی صفر بچا۔ پس $\pm (x + y + z)$ مطلوبہ جذر ہے۔

مثال 2:-

کا جذر معلوم کریں۔ $(x^2 - \frac{1}{x^2})^2 - 12(x^2 - \frac{1}{x^2}) + 36$

حل:

$$(x^2 - \frac{1}{x^2})^2 - 12(x^2 - \frac{1}{x^2}) + 36$$

$$= x^4 + \frac{1}{x^4} - 2 - 12x^2 + \frac{12}{x^2} + 36$$

$$= x^4 - 12x^2 + 34 + \frac{12}{x^2} + \frac{1}{x^4} \quad (\text{ترتیب نزولی میں لکھتے ہیں})$$

$$\begin{array}{r} x^2 - 6 - \frac{1}{x^2} \\ x^2 \overline{) x^4 - 12x^2 + 34 + \frac{12}{x^2} + \frac{1}{x^4}} \\ \underline{\pm x^4} \phantom{+ 34 + \frac{12}{x^2} + \frac{1}{x^4}} \\ 2x^2 - 6 \phantom{+ \frac{12}{x^2} + \frac{1}{x^4}} \\ \underline{\pm 2x^2 - 12 - \frac{1}{x^2}} \phantom{+ \frac{1}{x^4}} \\ 2x^2 - 12 - \frac{1}{x^2} \\ \underline{\pm 2x^2 - 12 - \frac{1}{x^2}} \\ 0 \end{array}$$

پس $(x^2 - 6 - \frac{1}{x^2})$ مطلوبہ جذر ہے۔

$$x^2 = a \Rightarrow x = \pm\sqrt{a} \quad \text{اور} \quad x = \pm\sqrt{a} \Rightarrow x^2 = a$$

مثال 3:- $x^4 - 12x^3 + 217x + 320$ کو مکمل مربع بنانے کے لیے

- (i) کیا جمع کیا جائے؟
(ii) کیا تفریق کیا جائے؟
(iii) x کی کس قیمت کے لیے مکمل مربع ہوگی؟

حل:

$$\begin{array}{r}
 x^2 - 6x - 18 \\
 x^2 \quad | \quad x^4 - 12x^3 + 0x^2 + 217x + 320 \\
 \underline{\pm x^4} \\
 2x^2 - 6x \quad | \quad -12x^3 + 0x^2 + 217x + 320 \\
 \underline{\pm 12x^3 \pm 36x^2} \\
 2x^2 - 12x - 18 \quad | \quad -36x^2 + 217x + 320 \\
 \underline{\mp 36x^2 \pm 216x \pm 324} \\
 \quad \quad \quad | \quad x - 4
 \end{array}$$

- (i) $-x + 4$ جمع کرنے سے جملہ مکمل مربع ہوگا۔
(ii) $x - 4$ تفریق کرنے سے جملہ مکمل مربع ہوگا۔
(iii) اگر $x - 4 = 0$ یعنی $x = 4$ ہو تو جملہ ایک مکمل مربع ہوگا۔

مثال 4:-

' l ' اور ' m ' کی کس قیمت کے لیے جملہ $4x^4 - 12x^3 + 25x^2 - lx + m$ ایک مکمل مربع ہوگا؟
جبکہ $x \neq 0$

حل:

$$\begin{array}{r}
 2x^2 - 3x + 4 \\
 2x^2 \quad | \quad 4x^4 - 12x^3 + 25x^2 - lx + m \\
 \underline{\pm 4x^4} \\
 4x^2 - 3x \quad | \quad -12x^3 + 25x^2 \\
 \underline{\mp 12x^3 \pm 9x^2} \\
 4x^2 - 6x + 4 \quad | \quad 16x^2 - lx + m \\
 \underline{\pm 16x^2 \mp 24x \pm 16} \\
 \quad \quad \quad | \quad (-l + 24)x + (m - 16) \text{ باقی بچا}
 \end{array}$$

دیا گیا جملہ مکمل مربع ہوگا اگر باقی بچا $(m - 16)x + (-l + 24)$ کی قیمت صفر کے برابر ہو۔
ایسا ممکن ہوگا اگر

$$-l + 24 = 0 \quad \text{اور} \quad m - 16 = 0$$

$$l = 24 \quad \text{اور} \quad m = 16$$

لہذا $l = 24$ اور $m = 16$ کے لیے دیا گیا جملہ ایک مکمل مربع ہوگا۔

مشق 3.6

درج ذیل کا جذر المربع معلوم کیجیے۔

1. $16x^2 + 24xy + 9y^2$
2. $(x^2 - 7x + 12)(x^2 - 9x + 20)(x^2 - 8x + 15)$
3. $(x^2 + 8x + 7)(2x^2 - x - 3)(2x^2 + 11x - 21)$
4. $x(x + 2)(x + 4)(x + 6) + 16$
5. $(2x + 1)(2x + 3)(2x + 5)(2x + 7) + 16$
6. $(x^2 + \frac{1}{x^2}) - 10(x + \frac{1}{x}) + 27, x \neq 0$
7. $(t - \frac{1}{t})^2 - 4(t + \frac{1}{t}) + 8, (t \neq 0)$
8. $(x^2 + \frac{1}{x^2})^2 - 4(x + \frac{1}{x})^2 + 12, x \neq 0$
9. $4x^4 + 12x^3 + 25x^2 + 24x + 16$
10. $\frac{9x^2}{4y^2} - \frac{3x}{2y} - \frac{7}{4} + \frac{2y}{3x} + \frac{4x^2}{9y^2}, (x \neq 0, y \neq 0)$

11. 'x' کی کس قیمت کے لیے $x^4 + 4x^2 + x + \frac{8}{x^2} + \frac{4}{x^4}$ ایک مکمل مربع ہے۔ جبکہ $x \neq 0$

12. اگر $x^4 + lx^3 + mx^2 + 12x + 9$ ایک مکمل مربع ہو تو l اور m کی قیمتیں معلوم کریں۔

جائزہ مشق-3

I- صحیح جوابات کے گرد دائرہ لگائیں۔

1. دو الجبری جملوں کا حاصل ضرب
= $\frac{\text{ذواضعاف اقل}}{\text{عادا عظم}}$ ؟

- (a) عادا عظم (b) ذواضعاف اقل
(c) ذواضعاف اقل $\times$ عادا عظم (d) عادا عظم + ذواضعاف اقل

2. ذواضعاف اقل معلوم کرنے کے طریقے ہیں

- (a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

3. عادا عظم معلوم کرنے کے طریقوں کی تعداد ہے۔

- (a) 4 (b) 1 (c) 2 (d) 3

4. $12pq, 8p^2q$ کا عادا عظم ہے۔

- (a) $4pq$ (b) $4p^2q^2$ (c) $4pq^2$ (d) $4p^2q$

5. $2x^2 + 3x + 1, 2x^2 - x - 1$ کا عادا عظم ہے۔

- (a) $2x - 1$ (b) $2x + 1$ (c) $x + 1$ (d) $x - 1$

6. $6pqr, 15qrs$ کا عادا عظم ہے۔

- (a) $3qr$ (b) $3pqr$ (c) $3pqrs$ (d) $15pqrs$

7. $12p^3q^2, 8p^2$ کا ذواضعاف اقل ہے۔

- (a) $24pq^2$ (b) $24p^3q$ (c) $24p^3q^2$ (d) $12p^2q$

8. دو الجبری جملوں کا حاصل ضرب =

- (a) عادا عظم (b) ذواضعاف اقل
(c) ذواضعاف اقل $\times$ عادا عظم (d) ذواضعاف اقل + عادا عظم

9. دو الجبری جملوں کا حاصل ضرب
= $\frac{\text{ذواضعاف اقل}}{H.C.F}$

- (a) ذواضعاف اقل (b) عادا عظم
(c) 0 (d) عادا عظم $\times$ ذواضعاف اقل

10. $\frac{L.C.M \times H.C.F}{\text{پہلا جملہ}}$

- (a) دوسرا جملہ (b) 1 (c) عادا عظم (d) ذواضعاف اقل

-II خالی جگہ پر کریں۔

1. عاذا عظم معلوم کرنے کے طریقے ہیں = _____
2. ذواضعاف اقل معلوم کرنے کے طریقے ہیں = _____
3. ذوالجبری جملوں کا حاصل ضرب = _____ $\times$ ذواضعاف اقل
4. ذوالجبری جملوں کا حاصل ضرب = _____
ذواضعاف اقل
5. ذوالجبری جملوں کا حاصل ضرب = _____
عاذا عظم
6. عاذا عظم $\times$ ذواضعاف اقل = _____
پہلا جملہ
7. _____ ہے $2x^2 + 3x + 1$, $4x^2 - 1$ کا عاذا عظم
8. _____ ہے $x^3 + 8$, $x^2 - 4$ کا عاذا عظم
9. _____ ہے $2x^3y^3$, $4x^2y^4$ کا عاذا عظم
10. _____ ہے $3x^2y^2$, $2xyz$ کا ذواضعاف اقل

خلاصہ

عاذا عظم:

دو یا دو سے زیادہ الجبری جملوں کا عاذا عظم زیادہ سے زیادہ درجہ کا جملہ ہوتا ہے جو ان تمام جملوں کو تقسیم کرتا ہے۔

ذواضعاف اقل:

دو یا دو الجبری جملوں کا ذواضعاف اقل کم سے کم درجہ کا جملہ ہوتا ہے جو ان تمام جملوں سے بغیر ”باقی بچا“ کے پورا پورا تقسیم ہوتا ہے۔

LINEAR EQUATIONS AND INEQUALITIES

خطی مساواتیں اور غیر مساواتیں

- ◀ خطی مساواتیں
- ◀ مطلق قیمت والی مساوات
- ◀ خطی غیر مساواتیں
- ◀ خطی غیر مساواتوں کا حل

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

- ◀ ایک متغیر والی خطی مساوات کو سمجھ سکیں۔
- ◀ جذری مساوات کو سادہ خطی مساوات میں تحویل کر کے ان کا حل معلوم کر سکیں۔
- ◀ مطلق قیمت کی تعریف کر سکیں۔
- ◀ ایک متغیر والی مطلق قیمت کی مساوات کو حل کر سکیں۔
- ◀ غیر مساواتیں ($>$, $<$) اور ($\geq$, $\leq$) کی تعریف کر سکیں۔
- ◀ غیر مساواتوں کی خاصیتوں (جیسا کہ خاصیت ثلاثی، خاصیت متعدیت، جمعی خاصیت، ضربی خاصیت) کو پہچان کر سکیں۔
- ◀ طاق عددی سروں والی غیر مساواتوں کو حل کر سکیں۔

4.1 خطی مساوات LINEAR EQUATIONS

ایسا بیان جس میں دو الجبری جملوں کو برابری کی علامت "=" سے جوڑا گیا ہو مساوات کہلاتا ہے۔ ایک درجی کثیر رقمی والی مساوات خطی مساوات کہلاتی ہیں۔ مساوات $ax + b = 0$, $a \neq 0$ ایک متغیر میں خطی مساوات کی معیاری صورت ہے۔

مثلاً

(i) $7x + 3 = 5$

(ii) $\frac{3}{2}x + 4 = \frac{1}{3}$

(iii) $\frac{1}{2}(t + 3) - 2t = 5$

(iv) $\frac{5}{3}y + 4 = \frac{y - 2}{4}$

4.1.1 ایک متغیر میں خطی مساوات Linear Equation In One Variable

ایسی مساوات جو (i) $ax + b = 0$, $a \neq 0$ کی صورت میں لکھی جاسکے، جبکہ "a, b" مستقل مقادیر اور 'x' متغیر ہے۔ ایک متغیر میں ایک درجی مساوات کہلاتی ہے۔

مساوات (i) کو ہمیشہ حل کیا جاسکتا ہے۔

$$ax + b = 0$$

$$a \neq 0$$

$$ax = -b$$

$$x = \frac{-b}{a}$$

مساوات (i) کا حل ہے۔

مثال:-

ثابت کیجیے کہ $x = 2$ مساوات $5x - 12 = -2$ کا حل ہے۔

حل:

مساوات میں $x = 2$ رکھنے سے

$$\begin{aligned} L.H.S &= 5x - 12 = 5 \times (2) - 12 \\ &= 10 - 12 = -2 = R.H.S \end{aligned}$$

مساوات کو حل کرنے کے قوانین:

- (i) مساوات کو تبدیل کیے بغیر دونوں طرف یکساں مقدار کو جمع یا تفریق کیا جاسکتا ہے۔
- (ii) مساوات کی دونوں طرف ایک ہی غیر صفری عدد سے ضرب دینے سے مساوات تبدیل نہیں ہوتی۔
- (iii) مساوات کی دونوں طرف ایک ہی غیر صفری عدد سے تقسیم کرنے سے مساوات تبدیل نہیں ہوتی۔
- (iv) ٹرانسپوزیشن:

طرفین کی برابری متاثر ہوئے بغیر کسی بھی رقم کو مساوات کی ایک جانب سے دوسری جانب علامت کی تبدیلی کے ساتھ منتقل کیا جاسکتا ہے اس عمل کو ٹرانسپوزیشن کہتے ہیں۔

مثال :-

$$5x - 6 = 4x - 2 \text{ حل کریں۔}$$

ہمیں علم ہے کہ $5x - 6 = 4x - 2$ حل:

$$5x - 4x = -2 + 6 \text{ (} 4x \text{ کو L.H.S اور } -6 \text{ کو R.H.S منتقل کرنے سے)}$$

$$\text{لہذا } x = 4 \text{ مساوات کا حل ہے۔}$$

پڑتال: مساوات میں $x = 4$ رکھنے سے

$$L.H.S = 5 \times (4) - 6 = 20 - 6 = 14$$

$$R.H.S = 4 \times (4) - 2 = 16 - 2 = 14$$

$$L.H.S = R.H.S$$

پس: $x = 4$ مساوات کا حل ہے۔

4.1.2 خطی مساوات کا حل: Solution of a Linear Equation

متغیر کی کوئی ایسی قیمت جو مساوات کو درست بیان ثابت کر دے۔ مساوات کا حل کہلاتی ہے (یا مساوات کا روٹ) -
مساوات کو حل کرنے سے مراد متغیر کی ایسی قیمت معلوم کرنا ہے۔ جو کہ مساوات کو درست بیان ثابت کر سکے (یا مساوات کے معیار پر پورا اترے)۔

مثال 1:- $3x + \frac{1}{5} = 2 - x$ کو حل کریں۔

حل: $3x + \frac{1}{5} = 2 - x$

یا $3x + x = 2 - \frac{1}{5}$ ($-x$ کو L.H.S اور $\frac{1}{5}$ کو R.H.S پر منتقل کرنے سے)

یا $4x = \frac{9}{5}$

یا $\frac{1}{4} \times 4x = \frac{1}{4} \times \frac{9}{5}$ (دونوں اطراف کو 4 پر تقسیم کرنے سے)

$x = \frac{9}{20}$

پس $x = \frac{9}{20}$ دی گئی مساوات کا حل ہے

پڑتال: مساوات میں $x = \frac{9}{20}$ رکھنے سے

$L.H.S = 3 \times \frac{9}{20} + \frac{1}{5} = \frac{27}{20} + \frac{1}{5} = \frac{31}{20}$

$R.H.S = 2 - \frac{9}{20} = \frac{31}{20}$

$\therefore L.H.S = R.H.S$

پس $x = \frac{9}{20}$ دی گئی مساوات کا حل ہے

مثال 2:- $2y + \frac{11}{4} = \frac{1}{3}y + 2$ کو حل کریں۔

حل: $2y + \frac{11}{4} = \frac{1}{3}y + 2$ ہمیں علم ہے کہ

$2y - \frac{1}{3}y = 2 - \frac{11}{4}$ ($\frac{1}{3}y$ کو L.H.S اور $\frac{11}{4}$ کو R.H.S پر منتقل کرنے سے)

$\frac{5}{3}y = \frac{-3}{4}$

$\frac{3}{5} \times \frac{5y}{3} = \frac{3}{5} \times \left(\frac{-3}{4}\right)$ (دونوں اطراف $\frac{3}{5}$ سے ضرب دینے سے)

$y = \frac{-9}{20}$

پس $y = \frac{-9}{20}$ دی گئی مساوات کا حل ہے۔

پڑتال: $y = \frac{-9}{20}$ مساوات میں رکھنے سے ہم حاصل کرتے ہیں

$$L.H.S = 2 \times \left(\frac{-9}{20}\right) + \frac{11}{4} = \frac{-9}{10} + \frac{11}{4} = \frac{37}{20}$$

$$R.H.S = \frac{1}{3} \times \left(\frac{-9}{20}\right) + 2 = \frac{-3}{20} + 2 = \frac{37}{20}$$

$$\therefore L.H.S = R.H.S$$

پس $y = \frac{-9}{20}$ دی گئی مساوات کا حل ہے۔

مثال 3:- $\frac{1}{4}x + \frac{1}{6}x = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$ حل کیجیے۔

حل: 4, 6, 2, 4 کا ذواضعاف اقل 12 ہے۔

مساوات کے دونوں طرف 12 سے ضرب دینے سے

$$3x + 2x = 6x + 9$$

$$\text{یا } 5x = 6x + 9$$

$$\text{یا } 6x - 5x = -9 \quad [5x \text{ اور } 9 \text{ کو } x \text{ سے منہا کرنے سے}]$$

$$\text{یا } x = -9$$

پس $x = -9$ دی گئی مساوات کا حل ہے۔

پڑتال: مساوات میں $x = -9$ رکھنے سے ہم حاصل کرتے ہیں

$$L.H.S = \frac{1}{4} \times (-9) + \frac{1}{6} \times (-9) = \frac{-9}{4} - \frac{3}{2} = \frac{-15}{4}$$

$$R.H.S = \frac{1}{2} \times (-9) + \frac{3}{4} = \frac{-9}{2} + \frac{3}{4} = \frac{-15}{4}$$

$$\therefore L.H.S = R.H.S$$

پس $x = -9$ دی گئی مساوات کا حل ہے۔

مثال 4:- حل کیجیے۔ $\frac{5x-4}{8} - \frac{x-3}{5} = \frac{x+6}{4}$

حل: $\frac{5x-4}{8} - \frac{x-3}{5} = \frac{x+6}{4}$

طرفین کو 4, 5, 8 کے ذواضعاف اقل 40 سے ضرب دینے سے

$$5(5x-4) - 8(x-3) = 10(x+6)$$

یا $25x - 20 - 8x + 24 = 10x + 60$

یا $17x + 4 = 10x + 60$

یا $17x - 10x = 60 - 4$ [$10x$ کو L.H.S اور 4 کو R.H.S پر انہی طرف سے لے کر]

یا $7x = 56$

یا $x = \frac{56}{7} = 8$ [دونوں اطراف $\frac{1}{7}$ سے ضرب دینے سے]

پس $x = 8$ دی گئی مساوات کا حاصل ہے۔

پڑتال: مساوات میں $x = 8$ رکھنے سے

$$L.H.S = \frac{5 \times 8 - 4}{8} - \frac{8 - 3}{5} = \frac{36}{8} - 1 = \frac{28}{8} = \frac{7}{2}$$

$$R.H.S = \frac{8 + 6}{4} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$$

$$\therefore L.H.S = R.H.S$$

پس $x = 8$ دی گئی مساوات کا حاصل ہے۔

ہمیں جس بات کا علم ہونا چاہیے:

- ایسی خطی مساوات کو کیسے حل کریں کہ جس کے دونوں اطراف نامعلوم (متغیر) قیمتیں ہوں۔
- جملوں اور کلیوں میں رقموں کو سمجھنا کیسے ہے؟
- منفی کی علامت والی مساواتوں کو کیسے حل کیا جائے؟

مثال 5:- $x - \left[2x - \frac{3x-4}{7} \right] = \frac{4x-27}{3} - 3$ کو حل کریں۔

حل: $x - \left[2x - \frac{3x-4}{7} \right] = \frac{4x-27}{3} - 3$

بریکٹوں کو ختم کرنے سے

$$x - 2x + \frac{3x-4}{7} = \frac{4x-27}{3} - 3$$

$$\text{یا } -x + \frac{3x-4}{7} = \frac{4x-27}{3} - 3$$

دونوں طرف 3، 7 کے ذواضعاف اقل 21 سے ضرب دینے سے

$$-21x + 3(3x-4) = 7(4x-27) - 63$$

$$\text{یا } -21x + 9x - 12 = 28x - 189 - 63$$

$$\text{یا } -12x - 12 = 28x - 252$$

$$\text{یا } -12x - 28x = -252 + 12 \quad [\text{ٹرانسپوزیشن سے}]$$

$$\text{یا } -40x = -240$$

$$\text{یا } x = 6 \quad [\text{دونوں طرف } -40 \text{ پر تقسیم کرنے سے}]$$

پس $x = 6$ دی گئی مساوات کا حل ہے۔

پڑتال: مساوات میں $x = 6$ رکھنے سے

$$\begin{aligned} L.H.S &= 6 - \left[2 \times 6 - \frac{3 \times 6 - 4}{7} \right] = 6 - \left(12 - \frac{14}{7} \right) = 6 - (12 - 2) \\ &= 6 - 10 = -4 \end{aligned}$$

$$R.H.S = \frac{4 \times 6 - 27}{3} - 3 = \frac{-3}{3} - 3 = -1 - 3 = -4$$

$$\therefore L.H.S = R.H.S$$

پس $x = 6$ دی گئی مساوات کا حاصل ہے۔

ہمیں جس بات کا علم ہونا چاہیے:

• بریکٹ کے باہر () علامت کو کیسے استعمال کرنا ہے۔

مثال 6:- $0.3x + 0.4 = 0.28x + 1.16$ کو حل کریں۔

حل:

$$0.3x + 0.4 = 0.28x + 1.16$$

$$\text{یا } 0.3x - 0.28x = 1.16 - 0.4 \quad [\text{ٹرانسپوزیشن سے}]$$

$$\text{یا } 0.02x = 0.76$$

$$\text{یا } x = \frac{0.76}{0.02} = \frac{76}{2} = 38$$

پس $x = 38$ دی گئی مساوات کا حل ہے۔

پڑتال: مساوات میں $x = 38$ رکھتے

$$L.H.S = 0.3 \times 38 + 0.4 = 11.4 + 0.4 = 11.8$$

$$R.H.S = 0.28 \times 38 + 1.16 = 10.64 + 1.16 = 11.8$$

$$\therefore L.H.S = R.H.S$$

پس $x = 38$ دی گئی مساوات کا حل ہے۔

مثال 7:- $3x - 2(2x - 5) = 2(x + 3) - 8$ کو حل کریں۔

حل:

$$3x - 2(2x - 5) = 2(x + 3) - 8$$

$$3x - 4x + 10 = 2x + 6 - 8$$

$$-x + 10 = 2x - 2$$

$$3x - 2 = 10$$

$$3x = 12$$

$$x = 4$$

پس $x = 4$ دی گئی مساوات کا حل ہے۔

پڑتال: مساوات میں $x = 4$ رکھتے

$$3(4) - 2(2 \times 4 - 5) = 2(4 + 3) - 8$$

$$12 - 2(8 - 5) = 2(7) - 8$$

$$12 - 6 = 14 - 8$$

$$6 = 6$$

پس $x = 4$ دی گئی مساوات کا حل ہے۔

4.1.3 جذری مساوات Equations Involving Radicals

درج ذیل جیسی مساوات کو حل کرتے ہوئے

$$\sqrt{x-1} = 5 \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$x-1 = 25$$

$$x = 26$$

جو کہ مساوات (1) کا حل ہے

اسی طرح ہم اس مساوات کو حل کرتے ہیں

$$\sqrt{x-1} = -5 \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$x-1 = 25$$

$$x = 26$$

مساوات (2) کا حل نہیں ہے۔

$$5 \neq -5$$

اسی طرح ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\{x \mid x=5\} = \{5\}$$

$$\{x \mid x^2=25\} = \{-5, 5\}$$

ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ مساوات $x=5$ کا حل سیٹ مساوات $x^2=25$ کے حل سیٹ کا سب سیٹ ہے جو کہ $x=5$ کے طرفین کا مربع لینے سے حاصل ہوتا ہے۔

یہ بات یاد رکھنے کی ہے کہ کوئی بھی نئی مساوات جو کہ کسی مساوات کے دونوں طرف ایک جیسی قوت لینے سے حاصل ہوتی ہے اس کے بے اصل حل ہو سکتے ہیں۔ جو کہ اصل مساوات کا حل نہیں ہوتے دوسری طرف اصل مساوات کے حل میں کوئی حل ایسا بھی ہو سکتا ہے جو نئی مساوات سے تعلق رکھتا ہو۔

لہذا نئی مساوات کا ہر حل اصل مساوات میں رکھ کر پڑتال کر لینا چاہیے تاکہ بے اصل حذف کیے جاسکیں۔

مثال 1:-

$$x + \sqrt{x-4} = 4 \text{ حل کیجیے۔}$$

حل:

$$x + \sqrt{x-4} = 4$$

$$\sqrt{x-4} = 4-x \quad (\text{ جذری علامت ایک طرف رکھتے ہیں })$$

$$x-4 = 16-8x+x^2 \quad (\text{ دونوں اطراف کا مربع لینے سے })$$

$$x^2 - 9x + 20 = 0 \quad (\text{ دو درجی مساوات حل کرنے سے })$$

$$(x-5)(x-4) = 0$$

$$x = 5, 4$$

فالتو اصل حل دور کرنے کے لیے پڑتال کریں (اگر کوئی ہے تو)

$$x = 5$$

$$x = 4$$

$$5 + \sqrt{5-4} = 4 \quad , \quad 4 + \sqrt{4-4} = 4$$

$$5 + 1 \neq 4 \quad , \quad 4 = 4$$

لہذا $x = 5$ حل نہیں ہے

$x = 4$ حل ہے

$$\therefore \text{ حل سیٹ } = \{4\} \quad \text{پس}$$

یاد رکھیں کہ:

- بعض فارمولے مربع اور جذر المربع کے ساتھ استعمال ہوتے ہیں۔
- مربع اور جذر المربع ایک دوسرے کے بالعکس ہیں۔
- مربع کو ختم کرنے کے لیے جذر المربع لیا جاتا ہے۔
- جذر المربع ختم کرنے کے لیے مربع لیا جاتا ہے۔

مثال 2:-

$$\sqrt{3x-2} - \sqrt{x} = 2 \quad \text{حل کیجیے۔}$$

حل:

$$\sqrt{3x-2} = 2 + \sqrt{x}$$

$$3x-2 = 4 + 4\sqrt{x} + x \quad (\text{دونوں طرف مربع لینے سے})$$

$$3x - x - 2 - 4 = 4\sqrt{x}$$

$$2x - 6 = 4\sqrt{x}$$

$$x - 3 = 2\sqrt{x} \quad (\text{طرفین کو 2 سے تقسیم کرنے سے})$$

$$x^2 - 6x + 9 = 4x \quad (\text{طرفین کا مربع لینے سے})$$

$$x^2 - 10x + 9 = 0$$

$$(x-9)(x-1) = 0$$

$$x = 1, 9$$

بے اصل حل دور کرنے کے لیے پڑتال کریں

$$x = 1$$

$$x = 9$$

$$\sqrt{3 \times 1 - 2} - \sqrt{1} = 2$$

$$\sqrt{3 \times 9 - 2} - \sqrt{9} = 2$$

$$\sqrt{1} - \sqrt{1} = 2$$

$$\sqrt{25} - 3 = 2$$

$$0 \neq 2$$

$$5 - 3 = 2$$

$$x = 1 \text{ حل نہیں ہے}$$

$$x = 9 \text{ حل ہے}$$

$$\therefore \text{حل سیٹ} = \{9\}$$

یاد رہے کہ:

$$s = \sqrt{t+r} : \text{ جذرا المربع ختم کرنے کے لیے طرفین کا مربع لیں}$$

$$s^2 = t+r : \text{ 'r' تفریق کرنے سے}$$

$$s^2 - r = t \Rightarrow t = s^2 - r$$

مشق 4.1

حل کریں۔

1. (i) $3x + 20 = 44$

(ii) $\frac{4x}{5} - \frac{3x}{4} = 4$

(iii) $3x + 3(x+1) = 69$

(iv) $(90 - 9x) + 27 = 90 + 9$

2. $3(x+3) = 14 + x$

3. $3(2x+5) = 25 + x$

4. $9x - 3 = 3(2x - 8)$

5. $3(2x - 1) = 5(x - 1)$

6. $2(7x - 6) = 3(1 + 3x)$

7. $\frac{10x - 1}{2x + 5} = 3$

8. $\frac{2x + 1}{x + 5} = 1$

9. $\frac{5x + 3}{x + 6} = 2$

10. $y - 6 + \sqrt{y} = 0$

11. $x = 15 - 2\sqrt{x}$

12. $m - 13 = \sqrt{m+7}$

13. $\sqrt{5n+9} = n - 1$

14. $3 + \sqrt{2x-1} = 0$

15. $\sqrt{x+5} + 7 = 0$

16. $\sqrt{2x-1} - \sqrt{x-4} = 2$

17. $\sqrt{x+1} = 3$

18. $\sqrt{2x-1} = 5$

19. $\sqrt{x-1} = 10$

20. $\sqrt{3x+4} = 7$

4.2 مطلق قیمت والی مساواتیں: EQUATIONS INVOLVING ABSOLUTE VALUE

اس حصہ میں ہم مطلق قیمت والی مساواتوں کو حل کرنا سیکھیں گے۔

4.2.1 مطلق قیمت: Absolute Value

ہر حقیقی عدد 'x' کی مطلق قیمت کو $|x|$ سے ظاہر کیا جاتا ہے جس کا تعارف یہ ہے کہ

$$|x| = \begin{cases} x & \text{اگر } x > 0 \\ 0 & \text{اگر } x = 0 \\ -x & \text{اگر } x < 0 \end{cases}$$

مثلاً

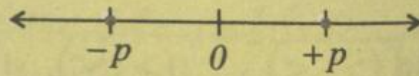
$$|8| = 8$$

$$|-8| = -(-8) = 8$$

4.2.2 مطلق قیمت والی مساواتیں: EQUATIONS INVOLVING ABSOLUTE VALUE

درج بالا تعریف کو استعمال کرتے ہوئے ہمیں مشکل پیش نہیں آئے گی کہ $p > 0$

$$|x| = p \Leftrightarrow x = \pm p$$

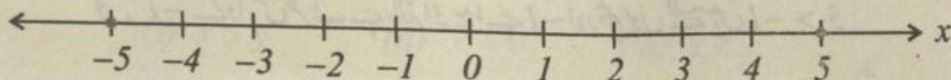


مثال:-

(i) $|x| = 5$ (ii) $|x - 3| = 5$ (iii) $|x + 2| = 3$ حل کیجیے۔

حل:

(i) $|x| = 5 \Rightarrow x = \pm 5$



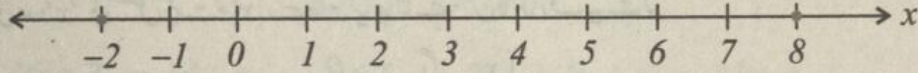
$$(ii) |x-3| = 5 \Rightarrow x-3 = \pm 5$$

$$x-3 = 5 \quad \text{یا} \quad x-3 = -5$$

$$x = 8 \quad \text{یا} \quad x = -5+3$$

$$x = -2$$

$$x = -2 \quad \text{یا} \quad 8$$



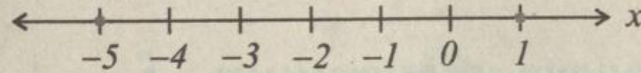
$$(iii) |x+2| = 3 \Rightarrow x+2 = \pm 3$$

$$x+2 = 3 \quad \text{یا} \quad x+2 = -3$$

$$x = 3-2 \quad \text{یا} \quad x = -3-2$$

$$x = 1 \quad \text{یا} \quad x = -5$$

$$x = 1 \quad \text{یا} \quad -5$$

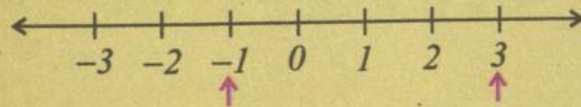


4.3 خطی غیر مساواتیں LINEAR INEQUALITIES

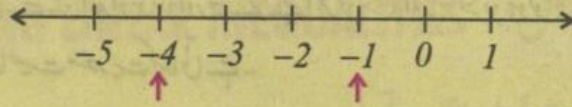
ہم عددی خط پر عددوں کی ترتیب کو جانتے ہیں۔ عددی خطوط پر کسی عدد کے دائیں جانب والا عدد بڑا اور اس کے بائیں جانب والا چھوٹا ہوتا ہے۔

4.3.1 غیر مساواتیں ($>$, $<$) اور ($\geq$, $\leq$): Inequalities ($>$, $<$) And ($\geq$, $\leq$)

ہم علامات ' $>$ ' استعمال کرتے ہیں 'بڑا ہے' کے لیے اور علامت ' $<$ ' استعمال کرتے ہیں 'چھوٹا ہے' کے لیے۔



مثلاً
3, -1 کے دائیں طرف ہے، لہذا 3 بڑا ہے -1 اور ہم یوں لکھتے ہیں $-1 < 3$



-4 ، -1 کے بائیں جانب ہے، لہذا -4 چھوٹا ہے -1 سے اور ہم لکھتے ہیں $-4 < -1$

ہم لکھتے ہیں $a < b$ اور پڑھتے ہیں a چھوٹا ہے b سے صرف اور صرف اگر کوئی مثبت حقیقی عدد p اس طرح ہو کہ

$$a + p = b;$$

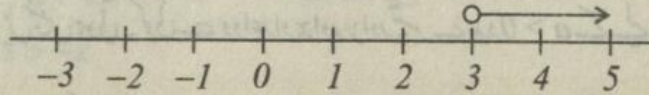
ہم $a > b$ لکھتے ہیں اور پڑھتے ہیں " a سے بڑا ہے"۔ ہم لکھتے ہیں $a \leq b$ صرف اور صرف $a < b$ یا $a = b$

اور ہم لکھتے ہیں $a \geq b$ صرف اور صرف $a > b$ یا $a = b$

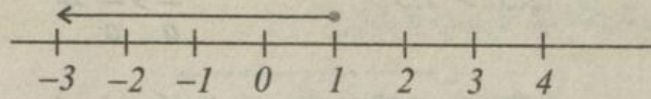
علامات " $<$ " ، " $>$ " ، " $\leq$ " اور " $\geq$ " ترتیبی تعلقات یا غیر مساواتوں کی علامات کہلاتی ہیں۔

دو الجبری جملے غیر مساواتوں کی علامت سے جڑے جیسا کہ $7(3x - 2) + \frac{x}{5} < 2x - \frac{2}{3}$ ایک غیر مساوات فقرہ یا صرف غیر مساوات کہلاتا ہے۔

$x > 3$ کا مطلب ہے x کی قیمت 3 سے بڑی ہے اور x کی قیمت 3 نہیں ہے۔
اسے عددی خط پر ظاہر کیا جاتا ہے۔



$x \leq 1$ کا مطلب ہے کہ x کی قیمت 1 سے چھوٹی ہے یا 1 کے برابر ہے
اس میں '1' شامل ہے، اسے عددی خط پر ظاہر کیا گیا ہے۔



4.3.2 غیر مساواتوں کی خصوصیات Properties Of Inequalities

ثلاثی خاصیت: عددی خط پر دو نمبروں x اور y کے لیے درج ذیل میں سے صرف کوئی ایک بیان درست ہوگا۔

(i) $x > y$

(ii) $x = y$

(iii) $x < y$

یہ قانون ثلاثی کہلاتا ہے۔

خاصیت متعدیت: کوئی سے تین اعداد x, y اور z کے لیے اگر $x > y$ اور $y > z$ ہو تو $x > z$ ہوگا۔ یہ غیر مساواتوں کی خاصیت متعدیت کہلاتی ہے۔

مثلاً اگر $x = 10, y = 5$ اور $z = 2$ ہو تو $10 > 5$ اور $5 > 2$ اور $10 > 2$

جمعی خاصیت: کسی غیر مساوات کے دونوں اطراف ایک ہی عدد جمع کرنے یا ایک ہی عدد تفریق کرنے سے غیر مساوات تبدیل نہیں ہوتی۔ کسی دو اعداد x اور y اور مثبت عدد a کے لیے۔

$$\begin{aligned} \text{اگر } x > y \quad \text{مثلاً } 5 > 3 \text{ اور } 2 > 0 \\ x + b &> y + b \quad 5 + (+2) > 3 + (+2) \\ x - b &> y - b \quad 5 - (-2) > 3 - (-2) \end{aligned}$$

یہی بات منفی عدد b کے لیے بھی درست ہے۔

$$\begin{aligned} \text{اگر } x > y \quad \text{مثلاً } 5 > 3 \text{ اور } -2 < 0 \\ x + b &> y + b \quad 5 - 2 > 3 - 2 \\ x - b &> y - b \quad 5 + 2 > 3 + 2 \end{aligned}$$

ضربی خاصیت: ہم کسی غیر مساوات کے دونوں اطراف کو مثبت عدد سے ضرب دیں یا تقسیم کریں تو غیر مساوات کی سمت تبدیل نہیں ہوتی۔ کوئی سے دو اعداد x اور y اور تیسرے عدد $a > 0$ کے لیے۔

$$\begin{aligned} \text{اگر } x > y \quad \text{مثلاً } 5 > 3 \text{ اور } 2 > 0 \\ ax &> ay \quad 2 \times 5 > 2 \times 3 \\ \frac{x}{a} &> \frac{y}{a} \quad 2.5 > 1.5 \end{aligned}$$

یہ بات منفی نمبر b کیلئے درست نہیں۔ جب کسی منفی عدد سے ضرب یا تقسیم کیا جاتا ہے تو عدم مساوات کی علامت الٹ جاتی ہے۔

$$\begin{aligned} \text{اگر } x > y \text{ اور } b < 0 \quad \text{مثلاً } 5 > 3 \text{ اور } -2 < 0 \\ bx &< by \quad (-2) \times 5 < (-2) \times 3 \\ \frac{x}{b} &< \frac{y}{b} \quad \frac{5}{-2} < \frac{3}{-2} \end{aligned}$$

4.4 عدم مساواتوں کا حل: SOLVING LINEAR INEQUALITIES

غیر مساواتیں تقریباً مساواتوں ہی کی طرح حل ہوتی ہیں۔

مثال 1:-

غیر مساواتوں کو حل کریں۔

(i) $x + 3 < 7$ (ii) $2x - 1 > 5$ (iii) $6 - x > 4$

حل:

(i) $x + 3 < 7$

$x + 3 - 3 < 7 - 3$ (دونوں اطراف سے 3 تفریق کرنے سے)
 $x < 4$

(ii) $2x - 1 > 5$

$2x - 1 + 1 > 5 + 1$ (دونوں اطراف میں 1 جمع کرنے سے)

$2x > 6$

$x > 3$ (دونوں اطراف کو 2 پر تقسیم کرنے سے)

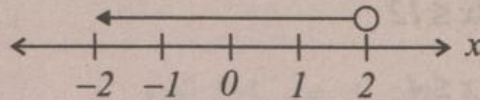
(iii) $6 - x > 4$

$6 - x - 6 > 4 - 6$ (دونوں اطراف سے 6 تفریق کرنے سے)

$-x > -2$

$x < 2$ (دونوں اطراف -1 سے ضرب دینے اور > کو < میں بدلنے سے)

کسی غیر مساوات کے حل میں نقاط کیسے شامل کیے جاتے ہیں؟



شکل (i)

شکل نمبر (i) میں ظاہر کیے گئے عددی خط کے ذریعے عدم مساوات کے حل کو آسانی سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ مثلاً $x < 2$ کو عددی خط شکل (i) میں دکھایا گیا ہے۔ چھوٹا خالی دائرہ '2' کی قیمت ممکن نہ ہونے کی علامت ہے۔ جبکہ 2 کی بائیں جانب کی قیمتیں شامل ہیں۔

مثال 2:-

$\frac{1}{3}x > \frac{1}{4}(x-1)$ غیر مساوات حل کریں۔

حل:

$$\frac{1}{3}x > \frac{1}{4}(x-1)$$

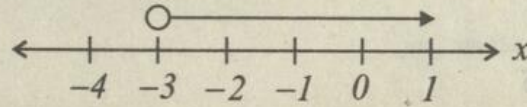
$$12 \times \frac{1}{3}x > 12 \times \frac{1}{4}(x-1)$$

$$4x > 3(x-1)$$

$$4x > 3x-3$$

$$4x-3x > -3$$

$$x > -3$$



شکل (ii)

حل کو شکل (ii) میں عددی خط کے ذریعے ظاہر کیا گیا ہے۔

مثال 3:-

$x-7 \leq 5-2x$ غیر مساوات حل کریں۔

حل:

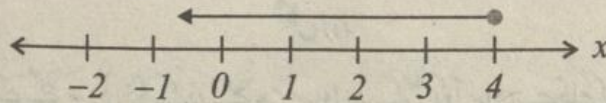
$$x-7 \leq 5-2x$$

$$x+2x-7 \leq 5$$

$$3x \leq 5+7$$

$$3x \leq 12$$

$$x \leq 4$$



شکل (iii)

سیاہ دائرہ ظاہر کرتا ہے کہ 4 حل میں شامل ہے۔

مثال 4:-

$$\frac{4x-3}{3} + 8 > 6 + \frac{3x}{2}$$

حل کیجیے اور گراف بنائیے۔

حل:

$$\frac{4x-3}{3} + 8 > 6 + \frac{3x}{2}$$

$$6 \times \frac{4x-3}{3} + 6 \times 8 > 6 \times 6 + 6 \times \frac{3x}{2}$$

$$8x - 6 + 48 > 36 + 9x$$

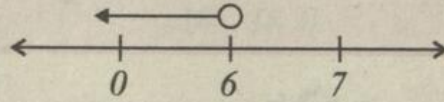
$$8x + 42 > 36 + 9x$$

$$8x - 9x + 42 > 36$$

$$-x > 36 - 42$$

$$-x > -6$$

$$x < 6$$



شکل (iv)

حل کو عددی خط پر شکل (iv) میں دکھایا گیا ہے۔

یاد رکھیے کہ:

غیر مساواتیں عموماً الجبر میں استعمال ہوتی ہیں۔ غیر مساواتیں، مساواتوں کی طرح ہی حل کی جاتی ہیں۔ اس کا مطلب ہے کہ:

- ہم غیر مساواتوں کے دونوں اطراف ایک ہی عدد جمع کر سکتے ہیں۔
- ایک ہی عدد غیر مساواتوں کے دونوں اطراف سے تفریق کر سکتے ہیں۔
- غیر مساواتوں کے دونوں اطراف کسی بھی مثبت عدد سے ضرب یا تقسیم کر سکتے ہیں۔

مشق 4.2

حل کیجیے اور پڑتال کیجیے۔

1. $|x| = 9$

3. $|x+1| = 5$

5. $|3x+4| = 9$

7. $3(x+5) > 2(x+2) + 8$

9. $\frac{x-2}{4} + \frac{2}{3} < \frac{x-4}{6}$

11. $\frac{x+1}{2} - \frac{x+3}{3} > \frac{x+1}{4} + 1$

13. $\frac{1}{2}x \geq 1 + \frac{1}{3}x$

15. $\frac{4}{3}(2x+3) \geq 10 - \frac{4x}{3}$

2. $|x-3| = 4$

4. $|2x-3| = 5$

6. $3(x-2) < 2x+1$

8. $\frac{1}{2}(2-x) > \frac{1}{4}(3-x) + \frac{1}{2}$

10. $\frac{3x+4}{5} - \frac{x+1}{3} > 1 - \frac{x+5}{3}$

12. $\frac{x+3}{4} - \frac{x+2}{5} < 1 + \frac{x+5}{6}$

14. $\frac{1}{4}(2x+3) \leq (7-4x)$

16. $\frac{x-2}{4} - \frac{x-5}{6} \geq \frac{1}{3}$

جائزہ مشق-4

I- صحیح جوابات کے گرد دائرہ لگائیے۔

1. مساوات جو $ax+b=0$ اور $a \neq 0$ کی صورت میں لکھی جاسکتی ہے۔ جبکہ b, a مستقل مقادیر ہیں اور x متغیر ہو، کہلاتی ہے۔

(a) خطی مساوات

(b) غیر مساوات

(c) حل

(d) مستقل

2. وہ قیمت جو کسی مساوات کو درست ثابت کرے، کہلاتی ہے:

(a) مساوات

(b) غیر مساوات

(c) حل

(d) مستقل

3. ہر عدد x کی مطلق قیمت کو ظاہر کیا جاتا ہے۔

- (a) x (b) $-x$
(c) $|x|$ (d) 0

4. علامت $\geq$ ظاہر کرتی ہے۔

- (a) سے بڑا ہے (b) سے بڑا یا برابر ہے
(c) سے چھوٹا ہے یا برابر (d) کے برابر ہے

5. علامت $\leq$ ظاہر کرتی ہے۔

- (a) سے چھوٹا ہے (b) سے بڑا یا برابر ہے
(c) سے چھوٹا یا برابر ہے (d) کے برابر ہے

6. $|x - 3| = 5$ کا حل سیٹ ہے۔

- (a) $\{8, -2\}$ (b) $\{-8, -2\}$
(c) $\{8, 2\}$ (d) $\{-8, 2\}$

7. $|x| = 3$ کا حل سیٹ ہے۔

- (a) 3 (b) -3
(c) ± 3 (d) 0

8. $|x - 1| = 4$ کا حل سیٹ ہے۔

- (a) $\{5, -3\}$ (b) $\{-5, -3\}$
(c) $\{-5, 3\}$ (d) $\{5, 3\}$

II- خالی جگہوں کو '= $'$ ، '>' یا '<' سے پر کر کے صحیح فقرہ بنائیے۔

1. اگر $15 > 10$ اور $10 > P$ تو 15 _____

2. اگر $-3 > x$ اور $x > y$ تو -3 _____

3. اگر $a < 60$ اور $60 < b$ تو a _____ b

4. اگر $x + 1 = y$ ہو تو x _____ y

5. اگر $m - 2 = n$ ہو تو m _____ n

6. اگر $x > y$ ہو تو $4x$ _____ $4y$

7. اگر $x > y$ ہو تو $\frac{x}{10}$ _____ $\frac{y}{10}$

8. اگر $x > y$ ہو تو $(-2)x$ _____ $(-2)y$

9. اگر $x > y$ ہو تو $\frac{x}{-3} \text{ ————— } \frac{y}{-3}$

10. اگر $p > q$ اور $q > 0$ ہو تو $p \text{ ————— } 0$

11. اگر $u > 0$ ہو تو $(-3)u \text{ ————— } 0$

12. اگر $u > 0$ ہو تو $\frac{u}{6} \text{ ————— } 0$

SUMMARY خلاصہ

خطی مساوات: ایسی مساوات جو $ax + b = 0$ ، $a \neq 0$ کی صورت میں لکھی جائے جبکہ a اور b مستقلات اور x ایک متغیر ہو، خطی مساوات کہلاتی ہے۔

خطی مساوات کا حل: مساوات میں موجود متغیر کی وہ قیمت جو اسے درست فقرہ بنائے مساوات کا حل کہلاتی ہے۔

مطلق قیمت: ہر حقیقی عدد 'x' کی مطلق قیمت $|x|$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ جس کو یوں بیان کیا جاتا ہے۔

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{اگر } x > 0 \\ 0, & \text{اگر } x = 0 \\ -x, & \text{اگر } x < 0 \end{cases}$$

خطی غیر مساوات: اگر دو الجبری یک درجی جملوں کو غیر مساوات کی علامتوں $>$, $<$, $\leq$, $\geq$ سے جوڑا گیا ہو تو ایسی مساواتیں غیر مساواتیں کہلاتی ہیں۔

ثلاثی خاصیت: اگر $x, y \in R$ پھر $x > y$ ، $x = y$ یا $x < y$

متعدیت خاصیت: اگر $x, y, z \in R$ تو $x > y$ اور $y > z$ تو $x > z$

جمعی خاصیت: $\forall a, b, c \in R$ اگر $a > b$ ہو تو $a + c > b + c$ اور $a - c > b - c$

ضربی خاصیت: $\forall a, b, c \in R$ فرض کیا جائے $a > b$ تو $ac > bc$ اگر $c > 0$ اور $ac < bc$ اگر $c < 0$

QUADRATIC EQUATIONS

دو درجی مساواتیں

- ◀ دو درجی مساوات
- ◀ دو درجی مساوات کا حل
- ◀ دو درجی مساوات کا کلیہ

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

- ◀ دو درجی مساوات کی تعریف کر سکیں۔
- ◀ ایک متغیر میں دو درجی مساوات کو حل کر سکیں۔
- بذریعہ تجزیہ • بذریعہ تکمیل مربع
- ◀ تکمیل مربع سے دو درجی مساوات کا کلیہ ثابت کر سکیں۔
- ◀ کلیہ کی مدد سے دو درجی مساوات کو حل کر سکیں۔
- ◀ حقیقی زندگی کے سادہ سوالات حل کر سکیں۔

5.1 دو درجی مساواتیں QUADRATIC EQUATIONS

ایک متغیر میں دو درجی مساوات ایک ایسی مساوات ہوتی ہے جس کو ہم درج ذیل صورت میں لکھ سکتے ہیں:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0,$$

جس میں x ایک متغیر ہے اور a, b, c حقیقی اعداد ہیں۔ ہم اسے دو درجی مساوات کی معیاری صورت کہتے ہیں۔
دو درجی مساوات ایک ایسی کثیررتی پر مشتمل ہوتی ہے جس میں متغیر کا زیادہ سے زیادہ قوت نما 2 ہوتا ہے۔

5.2 دو درجی مساوات کا حل SOLUTION OF A QUADRATIC EQUATION

ہم دو درجی مساوات کو درج ذیل طریقوں سے حل کر سکتے ہیں۔

(i) بذریعہ اجزائے ضربی (ii) بذریعہ تکمیل مربع (iii) دو درجی مساوات کا کلیہ

Solution of a Quadratic Equation by Factorization

5.2.1 دو درجی مساوات کا حل بذریعہ اجزائے ضربی

دو درجی مساوات کی عمومی شکل $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ ہوتی ہے۔ ہم اس مساوات کو صفری اجزائے ضربی کے قانون سے حل کر سکتے ہیں۔ جس کے مطابق

اگر $a \times b = 0$ ہو تو $a = 0$ یا $b = 0$ (یا دونوں a اور b صفر کے برابر ہوں گے) $a = 0, b = 0$

صفری اجزائے ضربی کا قانون صرف اور صرف اسی صورت میں کام دیتا ہے جب جملہ تجزی کی شکل میں ہو۔

مثال 1:- حل کریں $x^2 + 4x - 77 = 0$

$$x^2 + 4x - 77 = 0$$

$$(x - 7)(x + 11) = 0$$

$$x - 7 = 0 \quad \text{یا} \quad x + 11 = 0$$

مساوات کو اس طرح لکھیں کہ اس کی دائیں طرف صفر ہو۔
بائیں طرف کو تجزی کی شکل میں لکھیے صفری اجزائے ضربی کا
قانون استعمال کرتے ہوئے ہر جزو ضربی کو صفر کے برابر لکھیے۔

حل:

صفری اجزائے ضربی قانون لگانے سے پہلے ایسی مساواتیں جو اجزائے ضربی کی شکل میں نہ لکھی گئی ہوں کو پہلے اجزائے ضربی بنا کر لکھنے کی ضرورت ہوتی ہے۔

یاد رکھیے مساوات کی دائیں طرف صفر ہونا چاہیے۔

صحیح اعداد کے عددی سروں والی کثیررتی $ax^2 + bx + c$ کے یک درجی اجزائے ضربی اور صرف اسی صورت میں ممکن ہو سکتے ہیں اگر ac کے دو ایسے صحیح عددی اجزائے ضربی ہوں جن کا مجموعہ b کے برابر ہو۔

مثال 2:- $6x^2 - 19x - 7 = 0$ بذریعہ تجزیہ حل کیجیے۔

حل:

معیاری صورت سے موازنہ کرنے سے

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a = 6, \quad b = -19, \quad c = -7$$

$$ac = 6(-7) = -42$$

$$-42 = (-21)2 \quad \text{اور} \quad -21 + 2 = -19 = b$$

$$6x^2 - 19x - 7 = 0 \quad \text{پس}$$

$$6x^2 - 21x + 2x - 7 = 0$$

$$3x(2x - 7) + 1(2x - 7) = 0$$

$$(2x - 7)(3x + 1) = 0$$

$$2x - 7 = 0 \quad \text{یا} \quad 3x + 1 = 0$$

$$x = \frac{7}{2} \quad \text{یا} \quad x = -\frac{1}{3}$$

$$\text{حل سیٹ} = \left\{ -\frac{1}{3}, \frac{7}{2} \right\}$$

مثال 3:- $2x^2 = 3x$ حل کیجیے۔

حل:

$$2x^2 = 3x$$

$$2x^2 - 3x = 0$$

$$x(2x - 3) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{یا} \quad 2x - 3 = 0$$

$$x = \frac{3}{2}$$

$$\text{حل سیٹ} = \left\{ 0, \frac{3}{2} \right\}$$

نوٹ: $x = 0, \frac{3}{2}$ مساوات $2x^2 = 3x$ کے روٹس (اصل) کہلاتے ہیں۔

مثال 4:-

اگر $x = 3$ مساوات $x^2 + kx + 15 = 0$ کا حل ہو تو k کی قیمت معلوم کیجیے۔
مساوات کا دوسرا حل بھی معلوم کریں۔

حل: مساوات $x^2 + kx + 15 = 0$ میں $x = 3$ رکھنے سے

$$3^2 + 3k + 15 = 0$$

$$3k + 24 = 0 \Rightarrow k = -8$$

$$x^2 - 8x + 15 = 0 \quad \text{اب}$$

$$15 = (-5) \times (-3) \quad \text{اور} \quad (-5) + (-3) = -8 = b$$

$$x^2 - 5x - 3x + 15 = 0$$

$$x(x-5) - 3(x-5) = 0$$

$$(x-3)(x-5) = 0$$

$$x-3 = 0 \quad \text{یا} \quad x-5 = 0$$

$$x = 3 \quad \text{یا} \quad x = 5$$

$$\text{حل سیٹ} = \{3, 5\}$$

5.2.2 دو درجی مساوات کا حل بذریعہ تکمیل مربع

Solution of a Quadratic Equation by Completing the Square Method

تکمیل مربع کے طریقہ سے معیاری صورت میں دو درجی مساوات کو درج ذیل صورت میں لکھتے ہیں۔

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{_____ (1)}$$

$$(x+p)^2 = q \quad \text{_____ (2)} \quad \text{جبکہ } p, q \text{ مستقل مقداریں}$$

تکمیل مربع کے بعد مساوات (2) کو آسانی سے حل کیا جاسکتا ہے۔

لیکن مساوات (1) کو مساوات (2) کی صورت میں کیسے لائیں؟

$x^2 + bx$ کی شکل کی دو درجی مساوات کثیر رقمی کا مربع مکمل کرنے کے لیے x والی رقم کے عددی سر b کے نصف کا مربع $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ جمع کریں۔

اس بات کا نوٹ کرنا اہم ہے کہ بیان کیے گئے طریقہ کا اطلاق اسی صورت میں ممکن ہے جب دی گئی دو درجی مساوات میں متغیر کے مربع والی رقم کا عددی سر 1 ہے۔

تکمیل مربع کے اہم کلیے:

$$(i) \quad (x + m)^2 = x^2 + 2mx + m^2$$

$$(ii) \quad (x - m)^2 = x^2 - 2mx + m^2$$

مثال 1:-

$$x^2 + 6x - 2 = 0 \text{ تکمیل مربع سے حل کریں۔}$$

حل:

$$x^2 + 6x - 2 = 0$$

$$x^2 + 6x - 2 + 2 = 2 \quad \leftarrow \text{دونوں اطراف 2 جمع کرنے سے}$$

$$x^2 + 6x = 2$$

$$x^2 + 6x + (3)^2 = 2 + 3^2 \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{بائیں جانب کا مربع مکمل کرنے کے لیے } x \text{ کے} \\ \text{عدد سر 6 کے نصف کا مربع مساوات کے دونوں} \\ \text{طرف جمع کریں۔} \end{array}$$

$$(x + 3)^2 = 11$$

$$x + 3 = \pm \sqrt{11}$$

$$x = -3 \pm \sqrt{11}$$

$$\text{حل سیٹ} = \{-3 + \sqrt{11}, -3 - \sqrt{11}\}$$

مثال 2:- $(x - 3)^2 = 4$ حل کیجیے۔

حل:

$$(x - 3)^2 = 4$$

$$x^2 - 6x + 9 = 4$$

$$x^2 - 6x = -5$$

$$x^2 - 6x + (3)^2 = -5 + 9$$

$$(x - 3)^2 = 4$$

$$x = 3 \pm 2$$

$$\text{یا } x = 5$$

$$\text{یا } x = 1$$

$$\text{حل سیٹ} = \{1, 5\}$$

مثال 3:-

$3(x-2)^2 = x(x-2)$ کو تکمیل مربع کے طریقہ سے حل کیجیے۔

حل:

$$3(x^2 - 4x + 4) = x^2 - 2x$$

$$3x^2 - 12x + 12 = x^2 - 2x$$

$$3x^2 - x^2 - 12x + 2x = -12$$

$$2x^2 - 10x = -12$$

$$x^2 - 5x = -6$$

$$x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = -6 + \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = -6 + \frac{25}{4} = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$x^2 - \frac{5}{2} = \pm \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad \text{یا}$$

$$x = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{یا}$$

$$\text{حل سیٹ} = \{2, 3\}$$

مثال 4:-

$10x^2 - 12x = 15$ کو تکمیل مربع کے طریقہ سے حل کیجیے۔

حل:

$$10x^2 - 12x = 15$$

$$x^2 - \frac{12}{10}x = \frac{15}{10}$$

10 پر تقسیم کرنے سے

$$x^2 - \frac{6}{5}x = \frac{3}{2} \Rightarrow x^2 - \frac{6}{5}x + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{3}{2}$$

دونوں طرف $\left(\frac{3}{5}\right)^2$ جمع کرنے سے

$$\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} + \frac{3}{2} = \left(x - \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{18+75}{50} \Rightarrow \left(x - \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{93}{50}$$

$$x - \frac{3}{5} = \pm \sqrt{\frac{93}{50}} \quad \text{یا} \quad x = \frac{3}{5} \pm \frac{\sqrt{93}}{5\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{3\sqrt{2} \pm \sqrt{93}}{5\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{93}}{5\sqrt{2}} \quad \text{یا} \quad x = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{93}}{5\sqrt{2}}$$

$$\text{حل سیٹ} = \left\{ \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{93}}{5\sqrt{2}}, \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{93}}{5\sqrt{2}} \right\}$$

مثال 5:- $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+8} = \frac{1}{3}$ تجزی سے حل کریں۔

حل:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+8} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{x+8+x}{x(x+8)} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{2x+8}{x^2+8x} = \frac{1}{3}$$

$$x^2 + 8x = 6x + 24$$

$$x^2 + 2x - 24 = 0$$

$$(x+6)(x-4) = 0$$

$$x+6 = 0 \quad \text{یا} \quad x-4 = 0$$

$$x = -6 \quad \text{یا} \quad x = 4$$

$$\text{حل سیٹ} = \{4, -6\}$$

مثال 6:- $2x+4 = \frac{7}{x} - 1$ حل کیجیے۔

حل:

$$2x+4 = \frac{7}{x} - 1$$

$$x(2x+4) = x\left(\frac{7}{x} - 1\right)$$

← 'x' سے ضرب دینے سے

$$2x^2 + 4x = 7 - x$$

$$2x^2 + 5x - 7 = 0$$

$$(2x+7)(x-1) = 0 \leftarrow$$

$$2x+7 = 0 \Rightarrow x = \frac{-7}{2}$$

$$\text{یا } x-1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$\text{حل سیٹ} = \left\{ \frac{-7}{2}, 1 \right\}$$

$$a \times c = 2 \times (-7) = -14$$

2x	7	7x
↓ x	-1	-2x
2x ² - 7		5x
(2x+7)(x-1)		

مشق 5.1

I- بذریعہ تجزی حل کریں۔

1. $x^2 - 4x + 12 = 0$

2. $x^2 - 6x + 5 = 0$

3. $x^2 = 8 - 7x$

4. $5x = x^2 + 6$

5. $3x^2 - 10x + 8 = 0$

6. $2x^2 + 15x - 8 = 0$

7. $\frac{x}{4}(x+1) = 3$

8. $3x^2 - 8x - 3 = 0$

9. $2x = \frac{2}{x} + 3$

10. $5x^2 - 6x - 8 = 0$

11. $(2x+3)(x-2) = 0$

12. $(2x+1)(5x-4) = 0$

13. $4x(3x-1) - 2 = (2x-1)(5x+1)$

II- تکمیل مربع کے طریقہ سے حل کریں۔

14. $x^2 - 10x - 3 = 0$

15. $x^2 - 6x - 3 = 0$

16. $x^2 + x - 1 = 0$

17. $x^2 + 6x - 3 = 0$

18. $2x^2 - 4x + 1 = 0$

19. $2x^2 - 6x + 3 = 0$

20. $3x^2 + 5x - 4 = 0$

21. $x^2 + mx + n = 0$

22. $11x^2 = 6x + 21$

23. $2x^2 + 8x - 26 = 0$

24. $5x^2 - 20x - 28 = 0$

25. $x^2 - 11x - 26 = 0$

5.3 دو درجی مساوات کا کلیہ THE QUADRATIC FORMULA

دو درجی کلیہ، دو درجی مساوات کو حل کرنے کے طریقوں میں سے ایک ہے۔ عموماً یہ کلیہ وہاں استعمال کیا جاتا ہے جہاں تجزیہ مشکل یا ناممکن ہوتی ہے۔

5.3.1 دو درجی کلیہ اخذ کرنا Derivation of Quadratic Formula

دو درجی مساوات کی عمومی شکل

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

جبکہ a, b, c حقیقی اعداد ہیں۔

اب ہم تمام دو درجی مساواتوں کے حل میں استعمال ہونے والا تکمیل مربع کا طریقہ استعمال کرتے ہیں۔

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

سب سے بڑے درجے والی رقم x^2 کا عددی سر '1' بنانے کے لیے مساوات کو 'a' سے تقسیم کرتے ہیں۔

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{-c}{a}$$

x کے عددی سر $\frac{b}{a}$ کا نصف $\frac{b}{2a}$ کا مربع $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ بائیں طرف کا مربع مکمل کرنے کے لیے مساوات کے دونوں جانب جمع کرتے ہیں۔

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

آخری مساوات دو درجی کلیہ کہلاتی ہے۔

دو درجی مساوات کو حل کرنے کے طریقے

- (i) تجزیہ کا طریقہ
- (ii) تکمیل مربع کا طریقہ
- (iii) دو درجی کلیہ کا استعمال

مثال 1:-

$$2x + \frac{3}{2} = x^2$$

دو درجی کلیہ کی مدد سے حل کیجیے۔

حل:

$$2x + \frac{3}{2} = x^2$$

$$4x + 3 = 2x^2$$

کسر کو ختم کرنے کے لیے دونوں اطراف 2 سے ضرب دی
اور مساوات کو معیاری صورت میں لکھا

$$2x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$a = 2 \quad \text{چونکہ}$$

$$b = -4$$

$$c = -3$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{کلیہ}$$

کلیہ میں قیمتیں درج کرنے سے

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{16 + 24}}{4} = \frac{4 \pm \sqrt{40}}{4}$$

$$= \frac{4 \pm 2\sqrt{10}}{4}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{2}$$

$$\text{حل سیٹ} = \left\{ \frac{2 + \sqrt{10}}{2}, \frac{2 - \sqrt{10}}{2} \right\}$$

مثال 2:- $4x^2 + 3x - 2 = 0$ دو درجی کلیہ کی مدد سے حل کیجیے۔

حل:

$$4x^2 + 3x - 2 = 0$$

یہاں $a = 4$, $b = 3$, $c = -2$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{کلیہ}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(4)(-2)}}{2(4)} \quad \text{کلیہ میں قیمتیں درج کرنے سے}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 32}}{8}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{41}}{8}$$

$$\text{حل سیٹ} = \left\{ \frac{-3 + \sqrt{41}}{8}, \frac{-3 - \sqrt{41}}{8} \right\}$$

مثال 3:- $9x^2 - 42x + 49 = 0$ دو درجی کلیہ کی مدد سے حل کیجیے۔

حل:

$$9x^2 - 42x + 49 = 0$$

چونکہ $a = 9$, $b = -42$, $c = 49$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{کلیہ}$$

$$x = \frac{-(-42) \pm \sqrt{(-42)^2 - 4(9)(49)}}{2(9)} \quad \text{کلیہ میں قیمتیں درج کرنے سے}$$

$$x = \frac{42 \pm \sqrt{1764 - 1764}}{18} \Rightarrow x = \frac{42}{18} = \frac{7}{3}$$

$$\text{حل سیٹ} = \left\{ \frac{7}{3} \right\}$$

مثال 4:-

دو درجی کلیہ کی مدد سے حل کریں۔ $(x+5)^2 + (2x-1)^2 - 67 = (x+5)(2x-1)$

$$(x+5)^2 + (2x-1)^2 - 67 = (x+5)(2x-1)$$

حل:

معیاری صورت میں لانے کے لیے

$$x^2 + 10x + 25 + 4x^2 - 4x + 1 - 67 = 2x^2 + 10x - x - 5$$

$$5x^2 + 6x - 41 = 2x^2 + 9x - 5$$

$$3x^2 - 3x - 36 = 0$$

$$x^2 - x - 12 = 0 \quad \leftarrow \quad \boxed{\text{3 پر تقسیم کرنے سے}}$$

معیاری صورت سے موازنہ کرنے سے

$$a = 1, b = -1, c = -12$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{کلیہ}$$

کلیہ میں قیمتیں درج کرنے سے

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-12)}}{2(1)} \quad \text{پس}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm 7}{2}$$

$$x = \frac{1+7}{2} \quad \text{یا} \quad x = \frac{1-7}{2}$$

$$x = 4 \quad \text{یا} \quad x = -3$$

$$\text{حل سیٹ} = \{4, -3\}$$

مثال 5:-

$$\frac{x-5}{2x} = \frac{x-4}{3} \quad \text{دو درجی کلیہ کی مدد سے حل کریں۔}$$

حل:

$$\frac{x-5}{2x} = \frac{x-4}{3}$$

$$3(x-5) = 2x(x-4)$$

$$3x-15 = 2x^2-8x$$

$$2x^2-11x+15 = 0$$

$$a = 2, b = -11, c = 15 \quad \text{یہاں پر}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{کلیہ}$$

$$= \frac{-(-11) \pm \sqrt{(-11)^2 - 4(2)(15)}}{2(2)}$$

$$= \frac{11 \pm \sqrt{121-120}}{4}$$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{1}}{4} = \frac{11 \pm 1}{4}$$

$$x = \frac{11+1}{4}$$

یا

$$x = \frac{11-1}{4}$$

$$x = \frac{12}{4}$$

یا

$$x = \frac{10}{4}$$

$$x = 3$$

یا

$$x = \frac{5}{2}$$

$$\text{حل سیٹ} = \left\{ 3, \frac{5}{2} \right\}$$

مشق 5.2

دو درجی کلیہ کی مدد سے حل کریں۔

1. $x^2 - 5x + 6 = 0$

2. $(3 - 4x) = (4x - 3)^2$

3. $3x^2 + x - 2 = 0$

4. $10x^2 - 5x = 15$

5. $(x - 1)(x + 3) - 12 = 0$

6. $x(2x + 7) - 3(2x + 7) = 0$

7. $\frac{x+1}{x+4} = \frac{2x-1}{x+6}$, جبکہ $x \neq -4, -6$

8. $\frac{x}{6} + \frac{6}{x} = \frac{4}{x} + \frac{x}{4}$, جبکہ $x \neq 0$

9. $\frac{x+4}{x-4} + \frac{x-4}{x+4} = \frac{10}{3}$ جبکہ $x \neq -4$

10. $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} = \frac{2}{x-3}$ جبکہ $x \neq 1, 2, 3$

11. $(x+4)(x-1) + (x+5)(x+2) = 6$

12. $(2x+4)^2 - (4x-6)^2 = 0$

5.3.3 دورجی مساواتوں کی مدد سے مسائل کا حل

Problems Involving Quadratic Equations

مثال 1:-

ایسے دو مسلسل مثبت طاق اعداد معلوم کریں جن کے مربعوں کا مجموعہ 130 ہو۔

$$x = \text{پہلا طاق عدد}$$

حل: فرض کیا کہ

$$x + 2 = \text{دوسرا طاق عدد}$$

$$x^2 + (x + 2)^2 = 130 \quad \text{بموجب شرط سوال}$$

$$x^2 + x^2 + 4x + 4 = 130$$

$$2x^2 + 4x - 126 = 0$$

$$x^2 + 2x - 63 = 0$$

2 پر تقسیم کرنے سے

$$x^2 + 9x - 7x - 63 = 0$$

$$x(x + 9) - 7(x + 9) = 0$$

$$(x + 9)(x - 7) = 0$$

$$x + 9 = 0 \quad \text{یا} \quad x - 7 = 0$$

$$x = -9 \quad \text{یا} \quad x = 7$$

 $x = -9$ حل نہیں ہے کیونکہ یہ ایک منفی عدد ہے۔

$$x = 7 \quad \text{جب}$$

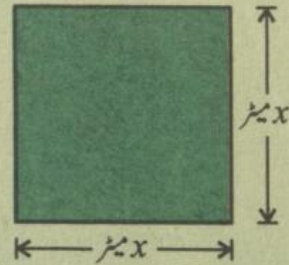
$$x + 2 = 7 + 2 = 9$$

 $\therefore$ دو مسلسل مثبت طاق اعداد 7، 9 ہیں

مربع کا رقبہ 10 مربع میٹر ہے۔

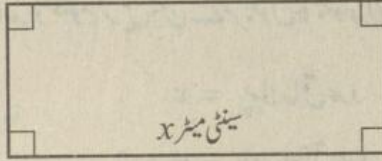
مربع کے ضلع کی لمبائی x میٹر ہے۔

ایسی مساوات لکھیے جو ظاہر کرے کہ مربع کا رقبہ 10 مربع میٹر ہے۔

 x کی قیمت معلوم کرنے کے لیے مساوات کو حل کریں۔

مثال 2:-

مستطیل کا احاطہ 22 سینٹی میٹر اور اس کا رقبہ 24 مربع سینٹی میٹر ہے۔ مستطیل کی لمبائی اور چوڑائی معلوم کیجیے۔



حل: فرض کیا کہ سینٹی میٹر x = مستطیل کی لمبائی

$$\text{مستطیل کا رقبہ} = 2(\text{لمبائی} + \text{چوڑائی})$$

$$\therefore 22 = 2(x + \text{چوڑائی})$$

$$\text{مستطیل کی چوڑائی} = \frac{22 - 2x}{2}$$

$$= (11 - x) \text{ سینٹی میٹر}$$

$$\text{مستطیل کا رقبہ} = x(11 - x)$$

$$24 = 11x - x^2$$

$$x^2 - 11x + 24 = 0$$

$$(x - 3)(x - 8) = 0$$

$$x = 3 \text{ یا } x = 8 \text{ اس لیے}$$

$$\text{جب } x = 3 \text{ ہو تو } 11 - 3 = \text{چوڑائی}$$

$$= 8 \text{ سینٹی میٹر}$$

$$\text{جب } x = 8 \text{ ہو تو } 11 - 8 = \text{چوڑائی}$$

$$= 3 \text{ سینٹی میٹر}$$

چونکہ لمبائی مقدار میں بڑی ہوتی ہے

$$\text{لمبائی} = 8 \text{ سینٹی میٹر}$$

$$\text{چوڑائی} = 3 \text{ سینٹی میٹر}$$

مثال 3:- ایک آدمی کی موجودہ عمر اپنے بیٹے کی عمر کا پانچ گنا ہے۔ 4 سال پہلے دونوں کی عمروں کا حاصل ضرب 52 تھا۔

ان کی موجودہ عمریں معلوم کیجیے۔

حل:

فرض کیا

$$\text{سال } x = \text{بیٹے کی موجودہ عمر}$$

$$\text{سال } 5x = \text{باپ کی موجودہ عمر}$$

$$\text{سال } x - 4 = \text{4 سال پہلے بیٹے کی عمر}$$

$$\text{سال } 5x - 4 = \text{4 سال پہلے باپ کی عمر}$$

$$\text{شرط سوال کے مطابق } (x - 4)(5x - 4) = 52$$

$$5x^2 - 24x + 16 = 52$$

$$5x^2 - 24x - 36 = 0$$

$$5x^2 - 30x + 6x - 36 = 0$$

$$5x(x - 6) + 6(x - 6) = 0$$

$$(5x + 6)(x - 6) = 0$$

$$5x + 6 = 0 \quad \text{یا} \quad x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-6}{5}, \quad \Rightarrow x = 6$$

چونکہ بیٹے کی عمر $\frac{6}{5}$ سال نہیں ہو سکتی لہذا بیٹے کی موجودہ عمر 6 سال ہے۔

$$\text{چونکہ سال } 6 = \text{بیٹے کی عمر}$$

$$\text{سال } 30 = \text{باپ کی عمر}$$

مثال 4:- دو مسلسل مثبت عدد معلوم کریں جن کے مربعوں کا مجموعہ 113 ہو۔

حل:

فرض کیا کہ x ، $x + 1$ مطلوبہ مسلسل مثبت اعداد ہیں

$$\text{دی گئی شرط کے مطابق } x^2 + (x + 1)^2 = 113$$

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 = 113$$

$$2x^2 + 2x - 112 = 0$$

$$x^2 + x - 56 = 0$$

$$(x + 8)(x - 7) = 0$$

$$x + 8 = 0 \quad \text{یا} \quad x - 7 = 0$$

$$x = -8 \quad \text{یا} \quad x = 7$$

$$x + 1 = 7 + 1 = 8$$

∴ مطلوبہ اعداد 7 اور 8 ہیں

2 پر تقسیم کرنے سے ←

مشق 5.3

1. دو ایسے مسلسل مثبت طاق اعداد معلوم کیجیے جن کے مربعوں کا مجموعہ 74 ہے۔
2. دو ایسے مسلسل مثبت جفت اعداد معلوم کریں جن کے مربعوں کا مجموعہ 164 ہو۔
3. دو اعداد کا فرق 9 ہے اور ان کا حاصل ضرب 162 ہے۔ اعداد معلوم کیجئے۔
4. مثلث کا قاعدہ اور ارتفاع بالترتیب $(x + 3)$ سینٹی میٹر اور $(2x - 5)$ سینٹی میٹر ہیں۔ اگر مثلث کا رقبہ 20 مربع سینٹی میٹر ہو تو x کی قیمت معلوم کریں۔
5. کسی مستطیل کا احاطہ اور رقبہ بالترتیب 22 سینٹی میٹر اور 30 مربع سینٹی میٹر ہیں۔ مستطیل کی لمبائی اور چوڑائی معلوم کریں۔
6. دو مسلسل مثبت اعداد کا حاصل ضرب 156 ہے۔ اعداد معلوم کریں
7. دو ایسے مسلسل مثبت طاق اعداد معلوم کریں۔ جن کے ضربی معکوس کا فرق $\frac{2}{63}$ ہے۔
8. دو مثبت اعداد کا مجموعہ 12 اور ان کے مربعوں کا مجموعہ 80 ہے۔ اعداد معلوم کریں۔

جائزہ مشق-5

I- صحیح جوابات کے گرد دائرہ لگائیے۔

1. دو درجی مساوات کا درجہ ہوتا ہے۔

- (a) 2 (b) 1 (c) 0 (d) 3

2. ایک متغیر میں خطی مساوات کا درجہ ہوتا ہے۔

- (a) 2 (b) 1 (c) 0 (d) 3

3. $2x^2 = 3x$ کی تجزی ہے۔

- (a) 0 (b) $x(2x - 3)$
(c) $2x^2 - 3x$ (d) $3x - 2x^2$

4. $(x - 2)^2 = 4$ کا حل سیٹ ہے۔

- (a) $\{0, 4\}$ (b) $\{-6, 2\}$
(c) $\{-6 - 2\}$ (d) $\{2, 6\}$

5. دو درجی مساوات کو حل کرنے کے طریقے ہیں۔

- (a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

6. $x^2 - 5x + 6 = 0$ کا حل سیٹ ہے۔

- (a) $\{3\}$ (b) $\{2\}$ (c) $\{2, 3\}$ (d) $\{-2, -3\}$

7. $x^2 - 9 = 0$ کا حل سیٹ ہے۔

- (a) $\{9\}$ (b) $\{\pm 9\}$ (c) $\{\pm 3\}$ (d) $\{3\}$

8. $x^4 - 16$ کی تجزی ہے۔

- (a) $(x - 2)(x + 2)$ (b) $(x - 2)(x + 2)(x - 4)$
(c) $(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$ (d) $(x - 2)^2$

9. $x^2 = 1$ کا حل سیٹ ہے۔

- (a) $\{1\}$ (b) $\{\pm 1\}$ (c) $\{\pm i\}$ (d) $\{-1\}$

10. $x^2 + 2x + 1 = 0$ کا حل سیٹ ہے۔

- (a) $\{-1, -1\}$ (b) $\{-1\}$ (c) $\{0\}$ (d) کوئی حل نہیں ہے

-II خالی جگہوں کو پر کیجیے۔

1. ایک متغیر والی مساوات جس کا درجہ '2' ہو _____ مساوات کہلاتی ہے۔

2. $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ _____ کہلاتا ہے۔

3. $2x^2 - 3x$ کی تجزی _____ ہے۔

4. $(x-1)^2 = 4$ کا حل سیٹ _____ ہے۔

5. دو درجی مساوات حل کرنے کے طریقے _____ ہیں۔

6. اگر کسی دو درجی مساوات کو حل کرنے کے لیے تجزی کا طریقہ نہ استعمال ہو سکے تو اسے حل کرنے کے لیے _____ استعمال کرتے ہیں۔

7. $x^2 - 5x + 6 = 0$ کا حل سیٹ _____ ہے۔

8. $x^2 - 9 = 0$ کا حل سیٹ _____ ہے۔

9. $x^4 - 16$ کی تجزی _____ ہے۔

10. $x^2 = 1$ کا حل سیٹ _____ ہے۔

خلاصہ SUMMARY

دو درجی مساوات: ایک متغیر میں دو درجی مساوات ایک ایسی مساوات ہوتی ہے کہ جیسے $ax^2 + bx + c = 0$ کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے جبکہ $a \neq 0$ اس میں 'x' متغیر ہوتا ہے اور a, b, c حقیقی اعداد ہوتے ہیں۔

دو درجی مساوات کا حل: ہم دو درجی مساوات کو حل کر سکتے ہیں۔

(i) تجزی کے طریقہ سے (ii) تکمیل مربع کے طریقہ سے

دو درجی کلیہ: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

MATRICES AND DETERMINANTS

قالب اور مقطع

- ◀ قالبوں کا تعارف
- ◀ قالبوں کی اقسام
- ◀ قالبوں کی جمع اور تفریق
- ◀ قالبوں کی ضرب
- ◀ قالب کا ضربی معکوس
- ◀ ہم زاد خطی مساوات کا حل

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

- ◀ قالب کا تعارف کروائیں۔
- حقیقی اعداد پر مشتمل مستطیلی شکل میں روزمرہ زندگی سے تعلق کے ساتھ • قالب کی قطاریں، کالم، مرتبہ اور قالبوں کی برابری
- ◀ قطاری، کالمی، مستطیلی اور مربعی قالبوں کا تعارف اور پہچان کر سکیں۔ صفری، ضربی ذاتی، سکیلر، وتری، ٹرانسپوز، متشاکل، اور ضد متشاکل قالب پہچان سکیں۔
- ◀ جان سکیں کہ دیے ہوئے قالب آپس میں جمع ہو سکتے ہیں یا نہیں۔
- ◀ قالب کو جمع اور تفریق کر سکیں۔
- ◀ قالب کو حقیقی عدد سے ضرب کر سکیں۔
- ◀ جمع کے لحاظ سے قوانین مبادلہ اور تلازم کی پڑتال کر سکیں۔
- ◀ جمعی ذاتی قالب متعارف کروائیں۔
- ◀ قالب کا جمعی معکوس معلوم کر سکیں۔
- ◀ جان سکیں کہ دیے ہوئے قالبوں کا ضرب ہو سکتی ہے یا نہیں۔
- ◀ دو یا تین قالبوں کو ضرب دے سکیں۔
- ◀ ضرب کے لحاظ سے قانون تلازم کی پڑتال کر سکیں۔
- ◀ قوانین تقسیمی پڑتال کر سکیں۔
- ◀ ثابت کر سکیں کہ عمودی طور پر ضرب کے لحاظ سے قانون مبادلہ پورا نہیں اترتا۔ $(AB \neq BA)$
- ◀ ضربی ذاتی قالب متعارف کروائیں۔
- ◀ $(AB)^t = B^t A^t$ کی تصدیق کر سکیں۔
- ◀ مربعی قالب کا مقطع متعارف کروائیں۔
- ◀ قالب کا مقطع حل کر سکیں۔
- ◀ نادر اور غیر نادر قالب کا تعارف کروائیں۔
- ◀ قالب کا ایڈجائنٹ معلوم کر سکیں۔
- ◀ غیر نادر قالب A کا ضربی معکوس معلوم کر سکیں اور تصدیق کر سکیں کہ $AA^{-1} = I = A^{-1}A$ جہاں I ضربی ذاتی قالب ہے۔
- ◀ ایڈجائنٹ کے طریقہ سے قالب کا ضربی معکوس معلوم کر سکیں۔
- ◀ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ کی تصدیق کر سکیں۔
- ◀ خطی مساواتوں کے نظام کو حل کر سکیں۔ • معکوس کے قالب کے طریقہ سے • کریر کے طریقہ سے

6.1 تعارف INTRODUCTION

اس باب میں ہم نئی حسابی صورت متعارف کروائیں گے جسے ہم قالب کہتے ہیں۔ جس کی مدد سے ہم مختلف مقداروں کو ایک اکائی میں ظاہر کر سکیں گے۔

مشہور ریاضی دان آر تھر کیلے نے 1857ء میں قالب کا تصور متعارف کروایا۔ قالب طبیعیات اور عمرانیات دونوں میں بہت وسیع حد تک استعمال کیے جاتے ہیں۔

قالب (مربعی یا مستطیلی شکل میں) اعداد کی قطاروں اور کالموں میں متعین ترتیب میں لکھی گئی شکل ہوتی ہے۔ جن کو بڑی یا چھوٹی بریکٹ میں لکھا جاتا ہے۔

عموماً قالبوں کو بڑے حروف تہجی $A, B, C, \dots$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ جبکہ قالب

کے ارکان کو چھوٹے حروف تہجی $a, b, c, \dots$ یا اعداد $1, 2, 3, \dots$ میں لکھا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C = [4 \quad 5], \quad D = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

ایک اور مثال لیجیے:

ایک شرٹ بنانے والی کمپنی ایک معیار کا اور ایک مقابلے کا ماڈل تیار کرتی ہے۔ دونوں ماڈلوں کے لیے مزدوری (گھنٹوں میں) کو 2×3 درجے والے قالب سے با آسانی ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$M = \begin{array}{cc} \text{پیکنگ اور ہینڈلنگ} & \text{صفائی} & \text{بنوائی} \\ \text{معیاری ماڈل} & 1 & 5 \\ \text{مقابلے کا ماڈل} & 2 & 7 \end{array}$$

ہفتہ وار پیداوار کو ایک قطاری قالب میں لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{array}{cc} \text{مقابلہ ٹی شرٹس} & \text{معیاری شرٹس} \\ [10] & [100] \end{array}$$

ہر قالب ارکان کی افقی اور عمودی ترتیب پر مشتمل ہوتا ہے۔

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

ارکان کی عمودی ترتیب

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \text{ارکان کی} \\ \text{افقی ترتیب} \end{matrix}$$

قطاریں: افقی ترتیب میں لکھے گئے ارکان قطاریں کہلاتی ہیں۔

کالم: ارکان کی عمودی ترتیب کالم کہلاتی ہے۔

قابلوں میں قطاروں اور کالموں کی تعداد برابر بھی ہو سکتی ہے اور مختلف بھی۔ لیکن ہر دو قطاروں میں ارکان کی تعداد یا پھر دو کالموں میں عناصر کی تعداد یکساں ہوتی ہے۔

عموماً قطاروں کو R اور کالموں کو C سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\begin{array}{ccc} \text{کالم 1} & & \text{کالم 2} \\ \text{یا} & & \text{یا} \\ C_1 & & C_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} & \leftarrow & \begin{matrix} R_1 \text{ یا قطار 1} \\ R_2 \text{ یا قطار 2} \end{matrix} \end{array}$$

قالب A میں دو قطاریں اور دو کالم ہیں جبکہ a, b, c, d اس کے ارکان کہلاتے ہیں۔ قطاروں کی تعداد کو m جبکہ کالموں کی تعداد کو n سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

درج بالا مثال میں $m = 2$ اور $n = 2$

Order of a Matrix: قالب کا مرتبہ

اگر کسی قالب A میں قطاروں کی تعداد 'm' اور کالموں کی تعداد 'n' ہو تو قالب A کا مرتبہ $m \times n$ ہوتا ہے۔ جو کہ $(m$ بائی $n)$ پڑھا جاتا ہے۔

مثال 1:- $P = [3]$ کا مرتبہ لکھیے۔

حل: قالب P میں صرف ایک قطار اور ایک کالم ہے لہذا

P (1 بائی 1) یعنی 1×1 مرتبہ کا قالب ہے۔

مثال 2:- $Q = [4 \ 7]$ کا مرتبہ معلوم کیجیے۔

حل: قالب Q میں قطاروں کی تعداد '1' اور کالموں کی تعداد '2' ہے۔

Q قالب کا مرتبہ 1×2 یعنی 1 بائی 2 ہے۔

مثال 3:- $R = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ کا مرتبہ معلوم کیجیے۔

حل: قالب R میں قطاروں کی تعداد دو یعنی $m = 2$ ہے۔

اور کالموں کی تعداد دو یعنی $n = 2$ ہے۔

R کا مرتبہ 2×2 یعنی 2 بائی 2 ہے۔

مثال 4:- $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ کا مرتبہ لکھیے۔

حل: قالب A میں قطاروں کی تعداد تین یعنی $m = 3$ کالموں کی تعداد تین یعنی $n = 3$

پس A کا مرتبہ 3×3 (تین بائی تین) ہے۔

یاد رکھیے کہ:

◀ کسی قالب A کے مرتبہ $m \times n$ کو m بائی n پڑھتے ہیں۔

◀ یہ بات اہمیت کی حامل ہے کہ اس قالب کے مرتبہ میں قطاروں کی تعداد پہلے یعنی بائیں جانب اور

کالموں کی تعداد بعد میں دائیں جانب لکھی جاتی ہے۔

مساوی قالب: Matrix Equality

دو قالب مساوی ہوں گے اگر ان کا مرتبہ یکساں ہو اور ان کے متناظرہ ارکان یکساں ہوں۔

دو قالبوں A اور B کے مساوی ہونے کو یوں لکھتے ہیں $A = B$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{2} & 2 \times 2 \\ \frac{12}{2} & 4 \times 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = \frac{4}{2} \\ 4 = 2 \times 2 \\ 6 = \frac{12}{2} \\ 8 = 4 \times 2 \end{cases} \quad \text{مثال کے طور پر}$$

مثال :- درج ذیل میں کون کون سے قالب مساوی اور کون سے غیر مساوی ہیں۔

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3-2 & \frac{4}{2} \\ 3 & 2 \times 2 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 1 & \frac{6}{2} & 7 \\ \frac{6}{3} & 1 & 3 \\ 2 \times 2 & 2 & \frac{10}{2} \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

حل: قالب B کو یوں لکھا جاسکتا ہے۔

$$B = \begin{bmatrix} 3-2 & \frac{4}{2} \\ 3 & 2 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = A$$

(i) A اور B کا مرتبہ یکساں یعنی 2×2 ہے اور متناظرہ ارکان بھی ایک جیسے ہیں۔ لہذا $A = B$

(ii) A، B اور C کے مرتبے یکساں ہیں لیکن C کے متناظرہ ارکان ایک جیسے نہیں۔ لہذا $A = B \neq C$

(iii) قالب E کے ارکان کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے کہ D اور E کے مرتبے یکساں ہیں یعنی 3×3 اور متناظرہ

ارکان بھی مساوی ہیں۔ لہذا $D = E$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & \frac{6}{2} & 7 \\ \frac{6}{3} & 1 & 3 \\ 2 \times 2 & 2 & \frac{10}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix} = D$$

(iv) چونکہ F کا مرتبہ 2×2 ہے۔ لہذا

$$E \neq F \text{ اور } F \neq D$$

مشق 6.1

درج ذیل قالبوں کی مدد سے سوال نمبر 1 تا 3 کا جواب دیجیے۔

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad E = [-3 \quad 2 \quad 0], \quad F = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

1- قالبوں A، C اور F کے مرتبے کیا ہیں؟

2- قالبوں D، B اور E کے مرتبے کیا ہیں؟

3- قالب D کی دوسری قطار اور تیسرے کالم کا رکن کیا ہے؟

4- درج ذیل قالبوں میں سے کون سے برابر ہیں اور کون سے برابر نہیں؟

$$A = [4], \quad B = [1 \quad 2], \quad C = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad D = [2+2],$$

$$E = \begin{bmatrix} 3+3 \\ 8+1 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 8 \end{bmatrix},$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 16/2 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3+2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & 4+2 & 3 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

6.2 قالبوں کی اقسام TYPES OF MATRICES

(I) قطاری قالب Row Matrix

ایسا قالب جس میں صرف ایک ہی قطار ہو، قطاری قالب کہلاتا ہے۔

مثال کے طور پر: $A = [1 \ 2]$ 1×2 مرتبہ کا قالب ہے۔

$B = [2 \ 3 \ 4]$ 1×3 مرتبہ کا قالب ہے۔

(II) کالمی قالب Column Matrix

ایسا قالب جس میں صرف ایک ہی کالم ہو، کالمی قالب کہلاتا ہے۔

مثال کے طور پر: $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ 2×1 مرتبہ کا قالب ہے۔

$D = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$ 3×1 مرتبہ کا قالب ہے۔

(III) مستطیلی قالب Rectangular Matrix

ایسا قالب جس میں قطاروں کی تعداد کالموں کی تعداد کے برابر نہ ہو، مستطیلی قالب کہلاتا ہے۔

مثال کے طور پر: $A = [2 \ 5]$, $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$,

$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

A, B, C بالترتیب $1 \times 2, 2 \times 1$ اور 2×3 مرتبہ کے قالب ہیں۔

(IV) مربعی قالب Square Matrix

اگر کسی قالب میں قطاروں اور کالموں کی تعداد برابر ہو، مربعی قالب کہلاتا ہے۔

مثال کے طور پر: $P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

Q, P بالترتیب: 2×2 اور 3×3 مرتبہ کے قالب ہیں۔

(V) صفری قالب Zero or Null Matrix

اگر کسی قالب میں تمام ارکان صفر ہوں تو اسے صفری قالب کہتے ہیں۔ صفری قالب کو O سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر: $O = [0]$ 1×1 کے مرتبہ کا قالب ہے

$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$ 1×2 مرتبہ کا قالب ہے

$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 2×2 مرتبہ کا قالب ہے

$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 3×3 مرتبہ کا قالب ہے

(VI) وتری قالب Diagonal Matrix

ایسا مربعی قالب جس میں وتر کے کم از کم ایک رکن کے علاوہ باقی سب کے سب ارکان صفر ہوں وتری قالب کہلاتا ہے۔
وتر کے کچھ ارکان صفر ہو سکتے ہیں مگر سارے نہیں۔

مثلاً $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

تمام کے تمام وتری قالب ہیں۔

(VII) سکالر قالب Scalar Matrix

ایسا وتری قالب جس میں وتر کے تمام ارکان آپس میں برابر ہوں سکالر قالب کہلاتا ہے۔

مثال کے طور پر:

سکالر قالب کہلاتے ہیں $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

(VIII) وحدانی قالب یا ضربی ذاتی قالب Unit Matrix or Identity Matrix

ایسا سکالر قالب جس کے وتر میں ہر رکن '1' ہو۔ ضربی ذاتی قالب کہلاتا ہے جس کو I سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر: $I = [I]$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
 مختلف مرتبوں کے ضربی ذاتی قالب ہیں۔

(IX) قالب کا ٹرانسپوز Transpose of a Matrix

قالب A جس کا مرتبہ $m \times n$ ہو، کی قطاروں کو کالموں میں تبدیل کر کے $n \times m$ مرتبہ کا حاصل ہونے والا نیا قالب A' کا ٹرانسپوز کہلاتا ہے۔

مثال کے طور پر: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ تو $A' = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ تو $B' = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

اگر A' ، B' بالترتیب A اور B کے ٹرانسپوز اور K کوئی سکالر ہو تو

$$(a) (A')' = A$$

$$(b) (kA)' = kA'$$

$$(c) (A+B)' = A' + B'$$

$$(d) (AB)' = B' A'$$

کوئی مربعی قالب A متشاکل قالب ہوتا ہے اگر $A' = A$

(X) متشاکل قالب Symmetric Matrix

مثال کے طور پر: $A = \begin{bmatrix} p & q \\ q & r \end{bmatrix}$ اور $A' = \begin{bmatrix} p & q \\ q & r \end{bmatrix}$

چونکہ $A' = A$ ، قالب A ایک متشاکل قالب ہے۔

$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ $B' = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

چونکہ $B' = B$ قالب B ایک متشاکل قالب ہے۔

(XI) غیر متشاکل قالب Skew-Symmetric Matrix

مربعی قالب A ، غیر متشاکل ہوتا ہے اگر $A' = -A$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{مثال کے طور پر:}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & -4 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix} = -A$$

چونکہ $A' = -A$
پس A ایک غیر متشاکل قالب ہے۔

مشق 6.2

1- مندرجہ ذیل میں سے قطاری قالب، کالمی قالب، مربعی قالب اور مستطیلی قالب کا تعین کیجیے۔

$$A = [3 \ 1 \ 1 \ 1], B = \begin{bmatrix} 5+2 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} a+x \\ b+y \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} x & -2 \\ b & 5 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & -5 & 0 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}, H = [0]$$

2- وتری قالب، سکیلر قالب، ضربی ذاتی قالب کا تعین کریں۔

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

3- درج ذیل قالبوں کے ٹرانسپوز معلوم کریں۔

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} a & -b \\ c & d \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} l & m & n \\ p & q & r \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

4- قطاری قالبوں کی شناخت کریں۔

$$A = [3 \quad 4 \quad 5], B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}, C = [e \quad f \quad g],$$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 9 & 8 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 3 & 7 & 3 \end{bmatrix},$$

5- کالمی قالبوں کی شناخت کریں۔

$$A = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 6 & 5 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ -4 \end{bmatrix}, F = [9 \quad 7 \quad 1]$$

6- کالمی قالبوں کی پہچان کریں۔

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \\ 7 & 3 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 6 & 5 \end{bmatrix},$$

$$E = [3 \quad 5 \quad 7], F = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

7- 3×3 مرتبہ کی مربعی قالبوں کی پہچان کریں۔

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 1 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}, C = [7 \quad 3 \quad 4]$$

ADDITION AND SUBTRACTION OF MATRICES

6.3 قالبوں کی جمع اور تفریق

دو قالب A اور B آپس میں جمع ہو سکتے ہیں اگر وہ ہم مرتبہ ہوں اور یہ مجموعہ $(A + B)$ کے مطابقت کے ارکان کو جمع کر کے حاصل کیا جاتا ہے۔

$A + B$ کا مرتبہ A اور B کے مرتبہ کے برابر ہوگا۔

6.3.2 قالبوں کو جمع اور تفریق کرنا Add and Subtract Matrices

Addition of Matrices قالبوں کی جمع

جب دو قالب جمع کے موافق ہوں تو ان کے مطابقت کے ارکان کو جمع کر کے ان قالبوں کا مجموعہ حاصل کیا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر:

$$(i) \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w+a & x+b \\ y+c & z+d \end{bmatrix}$$

$$(ii) \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(iii) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -2 & -5 \\ -5 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+3 & 2+(-2) & 4+(-5) \\ 2+(-5) & -3+2 & 5+1 \\ 3+(-1) & 4+(-3) & 7+(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Subtraction of Matrices قالبوں کی تفریق

اگر دو قالبوں کا مرتبہ یکساں ہو تو ان کا فرق $A - B$ لکھا جاتا ہے۔

$A - B$ ، قالب B کے متناظرہ ارکان کے ارکان کو قالب A کے مطابقت کے ارکان میں سے تفریق کر کے حاصل کیا جاتا ہے۔

مثال 1:- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & x \\ y & 4 \end{bmatrix}$ ہو تو $A - B$ معلوم کریں۔

حل:

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & x \\ y & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & 2 \\ 3 & b \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 - a & x - 2 \\ y - 3 & 4 - b \end{bmatrix}$$

مثال 2:- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix}$ ہو تو $A - B$ معلوم کریں۔

حل:

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-1 & 7-3 & 3-5 \\ -1-2 & 3-1 & 4-6 \\ 0-(-1) & 4-8 & -2-3 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -3 & 2 & -2 \\ 1 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

مثال 3:- قالبوں A, B اور C کو جمع کریں جب کہ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

چونکہ قالب A, B اور C ہم مرتبہ ہیں لہذا یہ جمع کے لیے موافق ہیں۔

حل:

$$A + B + C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+1+2 & 1+3-6 \\ 3-2-4 & 4+5+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}$$

مثال 4:- قالب B کو قالب A سے تفریق کریں۔

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 11 & -5 & 2 \\ 2 & 4 & -6 \\ 3 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

حل: چونکہ A اور B ہم مرتبہ ہیں لہذا تفریق کے موافق ہیں۔

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 11 & -5 & 2 \\ 2 & 4 & -6 \\ 3 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-11 & 4+5 & 7-2 \\ 1-2 & 3-4 & -2+6 \\ 4-3 & 5-6 & 6+1 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} -9 & 9 & 5 \\ -1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

6.3.3 سکالر سے ضرب A Scalar Multiplication

حقیقی اعداد کے سیٹ کا ہر رکن ایک سکالر کہلاتا ہے۔ ہم کسی قالب A کی کسی سکالر k سے ضرب کو kA سے ظاہر کرتے ہیں۔ یہ ایسا قالب ہوتا ہے جو قالب A کے تمام ارکان کو k سے ضرب دے کر بنایا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر:

$$kA = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix} \quad \text{ہو تو} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{اگر (i)}$$

$$3A = \begin{bmatrix} 12 & 9 & 6 \\ 6 & 18 & -3 \\ -9 & 12 & 21 \end{bmatrix} \quad \text{ہو تو} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & -1 \\ -3 & 4 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{اگر (ii)}$$

6.3.4 6.3.4 قوانین جمع کے قوانین Laws of Addition of Matrices

Commutative Law قانون مبادلہ

کوئی سے دو ہم مرتبہ قالبوں A اور B کے لیے

$$A + B = B + A$$

یہ قانون مبادلہ بلحاظ جمع کہلاتا ہے۔

مثال 1:-

اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$ ہو تو $A + B = B + A$ ثابت کیجیے۔

حل: قالب A اور B ہم مرتبہ ہیں۔ اس لیے یہ جمع کے لیے موافق ہیں۔

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+4 & 3+2 \\ 4-6 & 5+1 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

اور

$$B + A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+1 & 2+3 \\ -6+4 & 1+5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A + B = B + A \quad \text{پس}$$

Associative Law قانون تلازم

تین ہم مرتبہ قالبوں A , B اور C کے لیے۔

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

یہ قانون ”قانون تلازم بلحاظ جمع“ کہلاتا ہے۔

مثال:- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}$ ہو تو

قانون تلازم بلحاظ جمع کی تصدیق کیجیے۔

حل: $(A+B)+C = \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$(A+B)+C = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (i)$$

$$A+(B+C) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -4 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (ii)$$

$(A+B)+C = A+(B+C)$ اور (ii) سے ثابت ہوا کہ

6.3.5 قابلوں کے جمعی ذاتی قالب Additive Identity of Matrices

حقیقی اعداد کے سیٹ میں صفر "0" جمعی ذاتی عدد ہوتا ہے۔ یعنی حقیقی عدد اور صفر کا حاصل جمع وہی عدد ہوتا ہے۔
مثلاً $5 + 0 = 0 + 5 = 5$ اسی طرح صفری قالب O جس کا مرتبہ $(m \times n)$ ہے۔ جمعی ذاتی قالب کہلاتا ہے یعنی

$$A + O = O + A = A$$

مثلاً $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

اب $A+O = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$A+O = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = A$$

اور $O+A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = A$

پس $A+O=O+A=A$ لہذا 'O' جمعی ذاتی قالب ہے۔

6.3.6 قالب کا جمعی معکوس Additive Inverse of a Matrix

اگر قالب A اور B اس طرح ہوں کہ ان کا مجموعہ $(A + B)$ ایک صفری قالب 'O' ہو تو دونوں A اور B ایک دوسرے کا جمعی معکوس کہلاتے ہیں۔

مثال کے طور پر:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \text{ اور } B = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}$$

اب

$$A + B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

A اور B ایک دوسرے کے جمعی معکوس ہیں۔

مثال:-

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{bmatrix} \text{ اور } A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & 5 \\ -2 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

ہو تو

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & 5 \\ -2 & -1 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1+1 & 2-2 & -3+3 \\ 2-2 & -4+4 & 5-5 \\ -2+2 & -1+1 & 7-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$A + B = O$$

A اور B ایک دوسرے کے جمعی معکوس ہیں۔

مشق 6.3

1- اگر $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ اور $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 5 \\ 4 & 9 & 3 \end{bmatrix}$ ہو تو درج ذیل کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

(i) $A + B$

(ii) $A - B$

(iii) $B - A$

(iv) $2A + 3B$

(v) $3A - 4B$

(vi) $A - 2B$

2- درج ذیل قالبوں کے جمعی معکوس معلوم کیجیے۔

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 3 \\ 4 & \sqrt{3} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ 4 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

3- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ ہو تو ثابت کیجیے کہ

(i) $4A - 3A = A$ (ii) $3B - 3A = 3(B - A)$

4- x اور y معلوم کیجیے اگر $\begin{bmatrix} x+3 & 1 \\ -3 & 3y-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

5- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$ اور $C = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ ہو تو ثابت کیجیے کہ

(i) $A + B = B + A$

(ii) $A + (B + C) = (A + B) + C$

6- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ ہو تو X معلوم کیجیے جبکہ $3X - 2A = B$

7- a, b, c, d, e, f اور معلوم کیجیے۔

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \text{ جبکہ}$$

8- w, x, y, z معلوم کیجیے جبکہ

$$\begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$$

9- اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ تو A کا جمعی معکوس معلوم کریں۔

$$A^2 - 4A + 5I = 0 \text{ کہ } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ ہو تو ثابت کیجیے کہ} \quad -10$$

$$(A+B)^t = A^t + B^t \text{ کہ } B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \text{ اور } A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \text{ اگر} \quad -11$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ اور } B = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \text{ اگر} \quad -12$$

$$A + B - C = \begin{bmatrix} 2 & -10 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} \text{ ہو تو ثابت کیجیے کہ}$$

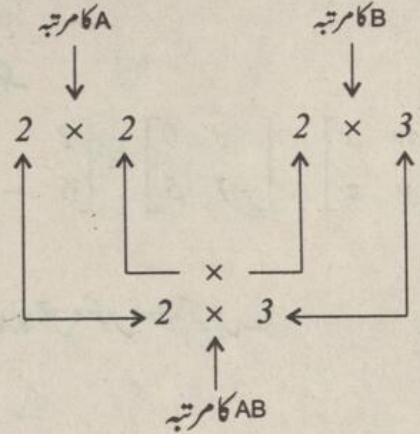
6.4.1 قالبوں کی ضرب MULTIPLICATION OF MATRICES

دو قالب A اور B ضرب AB کے لیے موزوں ہوتے ہیں اگر A میں کالموں کی تعداد B میں قطاروں کی تعداد کے برابر ہو۔

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 4 + 3 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 + 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \end{bmatrix} \text{ مثال کے طور پر:}$$

مثال 1:-

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$



حاصل ضرب AB کے ارکان اس طرح ہوں گے کہ:

$$AB = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix} \text{ جبکہ}$$

$$c_{11} = a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21}$$

A کی پہلی قطار کے اراکین اور B کے پہلے کالم کے اراکین کی ضرب

$$c_{12} = a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22}$$

A کی پہلی قطار کے اراکین اور B کے دوسرے کالم کے اراکین کا حاصل ضرب

$$c_{13} = a_{11} b_{13} + a_{12} b_{23}$$

A کی پہلی قطار کے اراکین اور B کے تیسرے کالم کے اراکین کا حاصل ضرب

$$c_{21} = a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21}$$

$$c_{22} = a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22}$$

$$c_{23} = a_{21} b_{13} + a_{22} b_{23} \text{ ، لہذا}$$

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} & a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} & a_{11} b_{13} + a_{12} b_{23} \\ a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} & a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} & a_{21} b_{13} + a_{22} b_{23} \end{bmatrix}$$

مثال 2:-

اگر $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ہو تو AB معلوم کیجیے۔

حل:

$$A = 2 \times 2 \text{ کا مرتبہ}$$

$$B = 2 \times 1 \text{ کا مرتبہ}$$

کیوں کہ $AB = 2 \times 1$ کا مرتبہ $B = 2$ میں قطاروں کی تعداد $A = 2$ میں کالموں کی تعداد

$$AB = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \times 2 + 2 \times 3 \\ 3 \times 2 + 4 \times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 + 6 \\ 6 + 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 18 \end{bmatrix}$$

نتیجہ:

$$A^2 = A.A \text{ اگر } A \text{ مربعی قالب ہو تو}$$

$$A^3 = A.A.A = AA^2 = A^2A$$

$$A^n = A.A.A \dots \dots \dots n \text{ بار}$$

یاد رکھیے کہ:

قالبوں A اور B کی ضرب AB کے لیے درج ذیل نکات کو ملحوظ خاطر رکھیے۔

(i) B میں قطاروں کی تعداد A میں کالموں کی تعداد

(ii) A اور B کا حاصل ضرب $A \times B$ یا AB سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

(iii) اگر قالب A کا مرتبہ $(m \times p)$ اور قالب B کا مرتبہ $(p \times n)$ ہو تو AB کا مرتبہ $(m \times n)$ ہوگا۔

Associative Law of Matrices with respect to Multiplication

6.4.3 قانون تلازم بلحاظ ضرب

اگر تین قالب A ، B اور C ضرب کے لیے موزوں ہوں تو

$$A(BC) = (AB)C$$

یہ قانون تلازم بلحاظ ضرب کہلاتا ہے۔

مثال :- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

ہو تو بلحاظ ضرب قانون تلازم کی تصدیق کیجیے۔

حل:

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \times 4 + 1 \times 3 & 1 \times 2 + 1 \times 1 \\ 2 \times 4 + 3 \times 3 & 2 \times 2 + 3 \times 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4+3 & 2+1 \\ 8+9 & 4+3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 17 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \times 7 + 1 \times 17 & 2 \times 3 + 1 \times 7 \\ 3 \times 7 + 1 \times 17 & 3 \times 3 + 1 \times 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14+17 & 6+7 \\ 21+17 & 9+7 \end{bmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 31 & 13 \\ 38 & 16 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(i)$$

$$(AB)C = \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ اور}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \times 1 + 1 \times 2 & 2 \times 1 + 1 \times 3 \\ 3 \times 1 + 1 \times 2 & 3 \times 1 + 1 \times 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 (AB)C &= \begin{bmatrix} 2+2 & 2+3 \\ 3+2 & 3+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 4 \times 4 + 5 \times 3 & 4 \times 2 + 5 \times 1 \\ 5 \times 4 + 6 \times 3 & 5 \times 2 + 6 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16+15 & 8+5 \\ 20+18 & 10+6 \end{bmatrix} \\
 (AB)C &= \begin{bmatrix} 31 & 13 \\ 38 & 16 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(ii)
 \end{aligned}$$

$A(BC) = (AB)C$ مساوات (i) اور (ii) سے
 قابلوں میں قانون تلازم بلحاظ ضرب درست ہے۔

6.4.4 ضرب کے قوانین تقسیمی Distributive Laws

اگر قالب A ، B اور C جمع اور ضرب کے لیے موزوں ہوں

(i) $A(B + C) = AB + AC$ (بائیں طرف سے قابلوں کی ضرب کا قانون تقسیمی)

(ii) $(A + B)C = AC + BC$ (دائیں طرف سے قابلوں کی ضرب کا قانون تقسیمی)

(i) اور (ii) قوانین تقسیمی کہلاتے ہیں۔

مثال :-

اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ اور $C = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

ہو تو بائیں طرف سے دائیں طرف قوانین تقسیمی کی تصدیق کیجیے۔

(i) بائیں طرف سے قانون تقسیمی $A(B + C) = AB + AC$

حل :

$$B + C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B + C = \begin{bmatrix} 2-1 & 3-4 \\ -1+3 & -2+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A(B + C) = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{اب}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+6 & -4+12 \\ 2+4 & -2+8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (i)$$

اور

$$AB + AC = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8-3 & 12-6 \\ 4-2 & 6-4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4+9 & -16+18 \\ -2+6 & -8+12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (ii)$$

مساوات (i) اور (ii) سے

$$A(B + C) = AB + AC.$$

(ii) دائیں طرف سے قانون تقسیمی $(A + B) C = AC + BC$

$$A + B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A + B) C = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{لہذا}$$

$$= \begin{bmatrix} -6 + 18 & -24 + 36 \\ -1 + 0 & -4 + 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 12 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (i)$$

اور

$$AC + BC = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 + 9 & -16 + 18 \\ -2 + 6 & -8 + 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 + 9 & -8 + 18 \\ 1 - 6 & 4 - 12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ -5 & -8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 12 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (ii)$$

مساوات (i) اور (ii) سے

$$(A + B) C = AC + BC.$$

6.4.5 Commutative Law قانون مبادلہ بلحاظ ضرب

عموماً قالبوں کی ضرب میں قانون مبادلہ لاگو نہیں ہوتا۔ یعنی $AB \neq BA$

مثال 1:- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ہو تو پڑتال کریں کہ $AB \neq BA$

حل: فرض کریں کہ قالب A اور B ضرب AB اور BA کے موزوں ہیں۔

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+8 & 3+4 \\ -3-8 & 9-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ -11 & 5 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (i)$$

$$BA = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+9 & -2-6 \\ 4+6 & 8-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -8 \\ 10 & 4 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (ii)$$

مساوات (i) اور (ii) سے

$$AB \neq BA$$

پس عموماً قانون مبادلہ قالبوں کی ضرب میں درست نہیں ہے۔

مثال 2:-

$$I_2 A = A I_2 = A \text{ ہو تو ثابت کیجیے کہ } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ اگر}$$

حل:

$$I_2 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \times a + 0 \times c & 1 \times b + 0 \times d \\ 0 \times a + 1 \times c & 0 \times b + 1 \times d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$I_2 A = A \text{(i)}$$

$$A I_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a \times 1 + b \times 0 & a \times 0 + b \times 1 \\ c \times 1 + d \times 0 & c \times 0 + d \times 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$A I_2 = A \text{(ii)}$$

مساوات (i) اور (ii) سے

$$I_2 A = A I_2 = A$$

6.4.7 مسئلہ Theorem

$(AB)^t = B^t A^t$ جبکہ A اور B دو قالب ہیں۔

مثال :-

اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ہو تو ثابت کریں کہ $(AB)^t = B^t A^t$

حل :

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2+6 & 6+3 \\ -1-4 & 3-2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L.H.S = (AB)^t = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 9 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (i)$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, B^t = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R.H.S = B^t A^t = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2+6 & -1-4 \\ 6+3 & 3-2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 9 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (ii)$$

مساوات (i) اور (ii) سے

$$(AB)^t = B^t A^t$$

مشق 6.4

سوالات 1 تا 8 میں دیے ہوئے بیانات کی تصدیق کیجیے جبکہ:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

1. $(AB)C = A(BC)$

2. $AB \neq BA$

3. $A(B+C) = AB+AC$

4. $(B+C)A = BA+CA$

5. $(B+C)(B-C) \neq B^2 - C^2$

6. $(BC)^t = C^t B^t$

7. $BI = B$

8. $BC \neq CB$

قالیوں کے حاصل ضرب معلوم کیجیے۔

9. $\begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -0 \end{bmatrix}$

15. اگر $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ 10 \end{bmatrix}$ ہو تو a اور b کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

16. اگر $(AB)^t = B^t A^t$ ہو تو ثابت کیجیے کہ $B = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ، $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

6.5 قالب کا ضربی معکوس MULTIPLICATIVE INVERSE OF A MATRIX

6.5.1 تفاعل کا مقطع Determinant Function

اس حصہ میں ہم ایک نئے تفاعل کا تعارف کروا رہے ہیں۔ جو کہ کسی مربعی قالب کا مقطع کہلاتا ہے۔ اس کی ڈومین میں حقیقی اعداد والے ارکان کے قالب ہوتے ہیں اور رینج تمام حقیقی اعداد کا سیٹ ہوتی ہے۔

اگر A کوئی مربعی قالب ہو تو قالب A کا مقطع $|A|$ یا $\det A$ سے ظاہر کیا جاتا ہے جو کہ ایک منفرد حقیقی عدد ہوتا ہے۔
 2×2 مرتبہ والے قالب کے مقطع کو درج ذیل طریقہ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

6.5.2 قالب A کے مقطع کی قیمت معلوم کرنا Evaluate Determinant of a Matrix

مثال 1:- اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$ ، $\det A$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = (-1) \times (-4) - (-3) \times 2 = 4 + 6 = 10$$

حل:

مثال 2:- اگر $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ، $\det A$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

$$\det A = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 12 - 8 = 4$$

حل:

مثال 3:- اگر $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 10 & 4 \end{bmatrix}$ ، $\det A$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 10 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 20 = 0$$

حل:

6.5.3 نادر اور غیر نادر قالب Singular and Non-Singular Matrices

نادر قالب Singular Matrix

ایک مربعی قالب A نادر قالب کہلاتا ہے اگر $\det A = 0$

مثال:- اگر $A = \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 36 - 36$$

$$\det A = 0$$

پس A ایک نادر قالب ہے۔

غیر نادر قالب Non-Singular Matrix

ایک مربعی قالب A غیر نادر قالب کہلاتا ہے اگر $\det A \neq 0$

مثال:- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 16 - 30$$

$$\det A = -14 \neq 0$$

پس A ایک غیر نادر قالب ہے۔

6.5.4 قالب کا ایڈجائنٹ Adjoint of a Matrix

فرض کیا $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ایک 2×2 کا مربعی قالب ہے۔ اگر اس قالب کے وتری ارکان a اور d کی جگہ آپس میں بدل دی جائے اور باقی ارکان b اور c کی علامتیں تبدیل کر دی جائیں تو اس طرح حاصل ہونے والا قالب A کا ایڈجائنٹ کہلاتا ہے۔

قالب A کا ایڈجائنٹ $adj A$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثلاً اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ہو تو $adj A = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ ایک دوسری مثال لیجیے۔

اگر $P = \begin{bmatrix} -6 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ہو تو $adj P = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$

6.5.5 ضربی معکوس Multiplicative Inverse

ہم جانتے ہیں کہ حقیقی اعداد کے سیٹ میں ہر غیر صفری حقیقی عدد a کے ذریعے ایک دوسرا حقیقی عدد a^{-1} ایسا موجود ہوتا ہے کہ $aa^{-1} = 1$ تو عدد a^{-1} پہلے عدد a کا ضربی معکوس کہلاتا ہے۔

اسی طرح ہر مربعی قالب A کا ضربی معکوس A^{-1} ہوتا ہے۔ اس طرح کہ $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ جبکہ $\det A \neq 0$

کسی غیر نادر قالب A کا ضربی معکوس A^{-1} یوں معلوم کیا جاتا ہے

$$A^{-1} = \frac{adj A}{|A|}, |A| \neq 0$$

اگر A ایک نادر قالب ہو تو اس کا ضربی معکوس نہیں ہوتا۔

یاد رکھیے کہ:

(i) مربعی قالب A کا ضربی معکوس A^{-1} سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

(ii) صرف غیر نادر قالب کا ضربی معکوس ہوتا ہے۔

(iii) کسی مربعی قالب A کا ضربی معکوس منفرد ہوتا ہے۔

(iv) غیر مربعی قالبوں کے ضربی معکوس نہیں معلوم کیے جاسکتے۔

$$A^{-1} = \frac{adj A}{|A|} \quad (v)$$

مثال:- اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ ہو تو $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ کی تصدیق کیجیے۔

جبکہ I ضربی ذاتی قالب ہے۔

حل:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, \quad \text{adj } A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \\ = 16 - 10$$

$$|A| = 6 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A \quad \text{ہم جانتے ہیں کہ}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$AA^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{اب}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 16-10 & -8+8 \\ 20-20 & -10+16 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AA^{-1} = I \quad \dots\dots\dots(i)$$

$$A^{-1}A = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{اور}$$

$$A^{-1}A = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 16-10 & 8-8 \\ -20+20 & -10+16 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}A = I \quad \dots\dots\dots(ii)$$

$$AA^{-1} = I = A^{-1}A \quad \text{مساوات (i) اور (ii) کی رو سے}$$

6.5.6 غیر نادر قالب کا ضربی معکوس Inverse of a Non-Singular Matrix

کسی غیر نادر قالب $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ کا ضربی معکوس $\frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ ہوتا ہے جبکہ $ad-bc \neq 0$

مثال 1:- اگر $A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 14 & 9 \end{bmatrix}$ ہو تو قالب کا ضربی معکوس معلوم کیجیے۔

حل: $A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 14 & 9 \end{bmatrix}, \Rightarrow adj A = \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -14 & 7 \end{bmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 14 & 9 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 63 - 42 = 21 \neq 0$$

ہم جانتے ہیں کہ $A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj A$

$$= \frac{1}{21} \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -14 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{9}{21} & \frac{-3}{21} \\ \frac{-14}{21} & \frac{7}{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{-1}{7} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

مثال 2:- اگر $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$ ہو تو B^{-1} معلوم کیجیے۔

حل: $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}, adj B = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

$$|B| = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$|B| = -6 - 12 = -18 \neq 0$$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \text{adj } B \quad \text{ہم جانتے ہیں کہ}$$

$$= \frac{1}{-18} \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-2}{-18} & \frac{4}{-18} \\ \frac{3}{-18} & \frac{3}{-18} \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{-2}{9} \\ \frac{-1}{6} & \frac{-1}{6} \end{bmatrix}$$

مثال 3:- اگر $P = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$ ہو اور ممکن ہو تو P^{-1} معلوم کیجیے۔

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}, \quad \text{adj } P = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$$

حل:

$$|P| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \times 4 - 2 \times 6 = 12 - 12 = 0$$

$$|P| = 0 \quad \text{چونکہ}$$

P کا معکوس معلوم نہیں کیا جاسکتا کیوں کہ $\frac{1}{0}$ معروف نہیں ہے۔

6.5.7 ثابت کرنا کہ $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ Verify

اسے ہم درج ذیل مثال سے ثابت کرتے ہیں۔

مثال :-

اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ ہو تو ثابت کیجیے کہ $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

حل:

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 12 + 30 & 6 + 24 \\ 8 + 5 & 4 + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 & 30 \\ 13 & 8 \end{bmatrix}$$

$$|AB| = \begin{vmatrix} 42 & 30 \\ 13 & 8 \end{vmatrix} = 42 \times 8 - 13 \times 30$$

$$= 336 - 390$$

$$= -54 \neq 0$$

$$L.H.S = (AB)^{-1} = \frac{1}{|AB|} \text{adj}(AB) \quad \text{اب}$$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{-54} \begin{bmatrix} 8 & -30 \\ -13 & 42 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(i)$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{adj } A = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 12 \\ = -9 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{|A|}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-9} \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, \quad \text{adj } B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 10 = 6$$

$$B^{-1} = \frac{\text{adj } B}{|B|} \quad \text{اب}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{-9} \right) \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{اب}$$

$$= -\frac{1}{54} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{54} \begin{bmatrix} 4+4 & -24-6 \\ -5-8 & 30+12 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1} = \frac{-I}{54} \begin{bmatrix} 8 & -30 \\ -13 & 42 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(ii)$$

(i) اور (ii) کی رو سے

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

مشق 6.5

1- درج ذیل قالبوں کے مقطع معلوم کیجیے۔

$$(i) \begin{bmatrix} u & v \\ x & y \end{bmatrix} \quad (ii) \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad (iii) \begin{bmatrix} -8 & -4 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \quad (iv) \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

2- نادر اور غیر نادر قالبوں کو الگ الگ کیجیے۔

$$(i) \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad (ii) \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} \quad (iii) \begin{bmatrix} -a & b \\ a & b \end{bmatrix}$$

3- ہر ایک قالب A کا ضربی معکوس A^{-1} معلوم کیجیے اور ثابت کیجیے کہ $A^{-1}A = I$ اگر ضربی معکوس نہ کیا جاسکے تو وجہ بیان کریں۔

$$(i) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (ii) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \quad (iii) \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \\ (iv) \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \quad (v) \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \quad (vi) \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ (vii) \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

$$4- \text{ اگر } M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ ہو تو}$$

(a) M^{-1} معلوم کیجیے۔

(b) ثابت کیجیے کہ $M^{-1}M = MM^{-1}$

$$5- B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ ہو تو ثابت کیجیے کہ } (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

SOLUTION OF SIMULTANEOUS LINEAR EQUATIONS

6.6 ہمزاد خطی مساواتوں کا حل

دو متغیرات کی قیمتیں معلوم کرنے کے لیے ہمیں دو مساواتوں کی ضرورت ہوتی ہے۔ مساواتوں کا ایسا جوڑا ہمزاد خطی مساواتوں کا نظام کہلاتا ہے۔

1- ہمزاد مساواتوں کو حل کرنے کے طریقے

(a) معکوس قالب کا طریقہ (b) کریمر کا قانون

2- ان طریقوں کی مدد سے ہم حقیقی مسائل کا حل سیکھیں گے۔

6.6.1 Matrix Inversion Method معکوس قالب کا طریقہ

فرض کیا کہ $a_1x + a_2y = b_1$ (i)

اور $a_3x + a_4y = b_2$ (ii)

دو یک درجی ہمزاد مساواتیں ہیں۔ یہ مساواتیں قالبوں کی شکل میں یوں لکھی جاسکتی ہیں۔

$$\begin{bmatrix} a_1x + a_2y \\ a_3x + a_4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad \text{یا}$$

$$AX = B \quad \text{یا} \quad \text{.....(iii)}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad \text{جبکہ}$$

x اور y کی قیمتیں معلوم کرنے کے لیے ہم مساوات (iii) درج ذیل طریقہ سے حل کرتے ہیں۔

$$AX = B$$

اگر A کا ضربی معکوس A^{-1} ہو تو

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \quad (\because A^{-1}A = I) \quad \text{جبکہ}$$

$$IX = A^{-1}B \quad (\because IX = X)$$

$$X = \frac{\text{adj } A}{|A|} B \quad |A| \neq 0 \quad \text{جبکہ}$$

اگر A نادر قالب یعنی $(|A| = 0)$ ہو تو دی ہوئی مساوات کا حل نکالنا ممکن نہیں۔

مثال :- درج ذیل مساواتوں کے سیٹ کو معکوس قالب کے طریقہ سے حل کریں۔

$$3x - 4y = 7, \quad 5x - 7y = 12$$

حل : دی گئی ہمزاد مساواتوں کو یوں قالب کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \end{bmatrix} \text{ یہاں پر}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = -21 + 20 = -1$$

$$|A| = -1 \neq 0$$

A ایک غیر نادر قالب ہے۔ لہذا مساواتیں حل کی جاسکتی ہیں۔

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B \quad \text{چونکہ}$$

$$X = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 49 & -48 \\ 35 & -36 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$y = -1 \text{ اور } x = 1 \text{ لہذا}$$

$$\text{حل سیٹ} = \{(1, -1)\}$$

کریمر کا قانون Cramer's Rule

ایک درجی ہمزاد مساواتیں کریمر کے قانون سے حل کی جاسکتی ہیں۔ کریمر کے طریقہ سے ایک درجی ہمزاد مساواتوں کے حل کرنے کی وضاحت نیچے دی جاتی ہے۔ درج ذیل دو مساواتوں پر غور کریں۔

$$a_1x + a_2y = b_1$$

$$a_3x + a_4y = b_2$$

قالبی شکل میں

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix}, \quad \text{جبکہ } |A| \neq 0$$

$$|D_1| = \begin{vmatrix} b_1 & a_2 \\ b_2 & a_4 \end{vmatrix}$$

$$|D_2| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$y = \frac{|D_2|}{|A|} \quad \text{اور} \quad x = \frac{|D_1|}{|A|} \quad \text{اب}$$

مثال 1:- کریمر کے طریقہ کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ایک درجی ہمزاد مساواتوں کو حل کریں۔

$$x + 3y = 6, \quad 2x + y = 4$$

$$\text{حل:} \quad x + 3y = 6, \quad 2x + y = 4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

قالبی شکل میں

$$AX = B$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 6 = -5 \neq 0$$

$$|D_1| = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 12 = -6$$

$$|D_2| = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 12 = -8$$

$$\therefore x = \frac{|D_1|}{|A|} = \frac{-6}{-5} \text{ اور } y = \frac{|D_2|}{|A|} = \frac{-8}{-5}$$

$$x = \frac{6}{5}, \quad y = \frac{8}{5} \quad \therefore \text{حل سیٹ} = \left\{ \left(\frac{6}{5}, \frac{8}{5} \right) \right\}$$

مثال 2:- 7 سیب اور 4 ناشپاتیوں کی قیمت 11 روپے جبکہ 5 سیب اور 2 ناشپاتیوں کی قیمت 7 روپے ہے۔
ہر ایک سیب اور ایک ناشپاتی کی قیمت کیا ہے؟

حل: ہم ہر سیب کی قیمت کو 'x' اور ناشپاتی کی قیمت کو 'y' سے ظاہر کرتے ہیں تو

$$7x + 4y = 11$$

$$5x + 2y = 7$$

قالبی شکل میں

$$\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 14 - 20 = -6 \neq 0$$

$$|D_1| = \begin{vmatrix} 11 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 22 - 28 = -6$$

$$|D_2| = \begin{vmatrix} 7 & 11 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 49 - 55 = -6$$

$$x = \frac{|D_1|}{|A|} = \frac{-6}{-6} = 1, \quad \text{ایک سیب کی قیمت 1 روپیہ}$$

$$y = \frac{|D_2|}{|A|} = \frac{-6}{-6} = 1, \quad \text{ایک ناشپاتی کی قیمت 1 روپیہ}$$

مثال 3:- دو اعداد معلوم کیجیے جن کا مجموعہ 67 اور فرق 3 ہے۔

حل:

فرض کیا کہ x اور y دو نمبر اس طرح ہیں کہ $x > y$ تو سوال کی دونوں شرائط کے مطابق

$$x + y = 67 \quad (i)$$

$$x - y = 3 \quad (ii)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 67 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ قالوں کی شکل میں}$$

$$AX = B$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

$$|D_1| = \begin{vmatrix} 67 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -67 - 3 = -70$$

$$|D_2| = \begin{vmatrix} 1 & 67 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 67 = -64$$

$$x = \frac{|D_1|}{|A|} = \frac{-70}{-2} = 35$$

$$y = \frac{|D_2|}{|A|} = \frac{-64}{-2} = 32$$

$$x = 35 \quad y = 32$$

∴ پس مطلوبہ اعداد 32 اور 35 ہیں۔

مثال 4:- ایک بیلٹ اور پرس کی مجموعی قیمت 42 روپے ہے۔ جبکہ 7 عدد بیلٹوں اور 4 عدد پرسوں کی کل قیمت 213 روپے ہے۔ ہر ایک کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل:

فرض کیا کہ بیلٹ اور پرس کی قیمت بالترتیب x اور y ہے۔

$$x + y = 42 \quad (i)$$

$$7x + 4y = 213 \quad (ii)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 \\ 213 \end{bmatrix} \text{ قالوں کی شکل میں}$$

$$AX = B$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 7 = -3 \neq 0$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

$$X = A^{-1}B$$

$$X = \left(\frac{\text{adj } A}{|A|} \right) B$$

$$= \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 42 \\ 213 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 168 - 213 \\ -294 + 213 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -45 \\ -81 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 27 \end{bmatrix}$$

$$x = 15 \quad , \quad y = 27$$

∴ پس ایک بیلٹ کی قیمت 15 روپے جبکہ پرس کی قیمت 27 روپے ہے۔

مشق 6.6

1- مساواتوں $2x + ky = 7$ اور $4x - 9y = 4$ کو قالب شکل میں لکھیے اور k کی قیمت بھی معلوم کیجیے اگر مساواتوں میں عددی سروں کا قالب نادر ہو۔

2- جہاں ممکن ہے ہمزا مساواتوں کو معکوس قالب کے طریقہ سے حل کریں۔ جہاں حل ممکن نہ ہو وجہ بیان کریں۔

(i) $2x - 5y = 1$	(ii) $3x + 2y = 10$	(iii) $4x + 5y = 0$
$3x - 7y = 2$	$2y - 3x = -4$	$2x + 5y = 1$
(iv) $5x + 6y = 25$	(v) $x + y = 2$	(vi) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$
$3x + 4y = 17$	$y = 2 + x$	$-4x + y = 14$

3- معکوس قالب کے طریقہ سے حل کریں۔

$$\begin{aligned} 3x - y &= 10 \\ 2x + 3y &= 3 \end{aligned}$$

4- کریم کے طریقہ سے ہمزا مساواتوں کو حل کریں۔ جہاں حل ممکن نہ ہو، وجہ بیان کریں۔

(i) $x + 2y = 3$	(ii) $2x + y = 1$	(iii) $x + 3y = 1$
$x + 3y = 5$	$5x + 3y = 2$	$2x + 8y = 0$
(iv) $-2x + 6y = 5$	(v) $x - 3y = 5$	(vi) $5x + 2y = 13$
$x - 3y = -7$	$2x - 5y = 9$	$2x + 5y = 17$

5- درج ذیل قالبوں کو یک درجی مساواتوں کی صورت میں لکھیے۔

(i) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$	(ii) $\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$
(iii) $\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$	(iv) $\begin{bmatrix} 0.8 & -0.6 \\ 0.6 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

جائزہ مشق-6

I- صحیح جواب کے گرد دائرہ لگائیے۔

1. قطاروں اور کالموں کی تعداد کسی قالب میں کے کو ظاہر کرتی ہے۔

- | | |
|-----------|------------|
| (a) مرتبہ | (b) قطاریں |
| (c) کالم | (d) مقطع |

2. قالب جس میں صرف ایک قطار ہو، کہلاتا ہے:

- | | |
|--------------------|----------------|
| (a) قطاری قالب | (b) کالمی قالب |
| (c) ضربی ذاتی قالب | (d) سکیر قالب |

3. وہ قالب، جمع کے لیے موزوں ہوتے ہیں اگر وہ ہوں:

- | | |
|------------------------|---------------------------|
| (a) ہم مرتبہ | (b) مختلف مرتبہ والے |
| (c) مرتبہ 2×2 | (d) مرتبہ 3×3 کے |

4. مربعی قالب میں قطاروں اور کالموں کی تعداد ہوتی ہے:

- | | |
|------------------|------------------|
| (a) 2×3 | (b) 3×2 |
| (c) یکساں | (d) 2×1 |

5. دو قالب جن کے مرتبے اور متبادل ارکان یکساں ہوں کہلاتے ہیں:

- | | |
|----------------|--------------------|
| (a) مساوی قالب | (b) وتری قالب |
| (c) مربعی قالب | (d) غیر مساوی قالب |

6. ایک ضربی ذاتی قالب میں وتر کے ارکان ہوتے ہیں:

- | | |
|-------|-------|
| (a) 3 | (b) 2 |
| (c) 1 | (d) 0 |

7. اگر $A' = -A$ ہو تو A کہلاتا ہے:

- | | |
|--------------|----------------|
| (a) متشاکل | (b) غیر متشاکل |
| (c) ٹرانسپوز | (d) مربعی قالب |

8. $(A + B)^t$ قالبوں A اور B کے لیے برابر ہوتا ہے۔

- | | |
|-----------------|---------------|
| (a) A^t | (b) B^t |
| (c) $A^t + B^t$ | (d) $A^t B^t$ |

9. قابلوں کے لیے $(A B)^t = ?$

- (a) A (b) B
(c) $B^t A^t$ (d) $A^t B^t$

10. قابلوں کے لیے $(A B)^{-1} = ?$

- (a) A^{-1} (b) B^{-1}
(c) $B^{-1} A^{-1}$ (d) $A^{-1} B^{-1}$

II - خالی جگہوں کو پُر کیجیے۔

1. قطاروں اور کالموں کی تعداد کسی قالب کے _____ کا تعین کرتے ہیں۔

2. قالب جس میں صرف ایک قطار ہو _____ کہلاتا ہے۔

3. دو قالب جمع کے لیے موزوں ہوتے ہیں اگر وہ _____ ہوں۔

4. ایک مربعی قالب میں قطاروں اور کالموں کی تعداد _____ ہوتی ہے۔

5. دو قالب جو ہم مرتبہ قالب _____ کہلاتے ہیں اگر ان کے متبادل ارکان بھی یکساں ہوں۔

6. ضربی ذاتی قالب میں وتر کے ارکان _____ ہوتے ہیں۔

7. $(AB)C = A(BC)$ جبکہ A ، B اور C قالب ہیں تو یہ _____ بلحاظ ضرب کہلاتا ہے۔

8. اگر $A^t = -A$ ہو تو A قالب _____ کہلاتا ہے۔

9. قابلوں میں $(AB)^t =$ _____

10. قابلوں میں $(AB)^{-1} =$ _____

SUMMARY خلاصہ

قالب: دو بریکٹوں میں قاعدہ کے تحت اعداد کی مستطیلی ترتیب قالب کہلاتی ہے۔
 قالب کا مرتبہ: قطاروں اور کالموں کی تعداد، قالب کے مرتبہ کا تعین کرتے ہیں۔
 قطاری قالب: قالب جس میں صرف ایک ہی قطار ہو قطاری قالب کہلاتا ہے۔
 کالمی قالب: قالب جس میں صرف ایک ہی کالم ہو، کالمی قالب کہلاتا ہے۔
 مربعی قالب: ایسا قالب جس میں قطاروں اور کالموں کی تعداد برابر ہو، مربعی قالب کہلاتی ہے۔
 مستطیلی قالب: مستطیلی قالب میں قطاروں اور کالموں کی تعداد برابر نہیں ہوتی۔
 صفری قالب: اگر کسی قالب میں تمام ارکان صفر ہوں وہ صفری قالب کہلاتا ہے۔
 وحدانی یا ضربی ذاتی قالب: ضربی ذاتی قالب میں وتر کے ارکان '1' اور غیر وتری ارکان تمام صفر ہوتے ہیں۔
 ٹرانسپوز قالب: کسی قالب کے کالموں اور قطاروں کو آپس میں بدلنے سے حاصل ہونے والا قالب اس قالب کا ٹرانسپوز کہلاتا ہے۔

متشکل قالب: اگر $A' = A$ ہو تو A متشکل قالب کہلاتا ہے۔
 غیر متشکل قالب: اگر $A' = -A$ ہو تو A غیر متشکل قالب کہلاتا ہے۔
 قالب کا مقطع: وہ حقیقی عدد جو ایک مربعی قالب کی قیمت ہو قالب کا مقطع کہلاتا ہے۔
 نادر قالب: اگر کسی قالب کا مقطع صفر ہو تو وہ نادر قالب وگرنہ غیر نادر قالب کہلاتا ہے۔
 2×2 مرتبہ والی مربعی قالب کا ایڈجائنٹ: یہ قالب اس قالب کے وتری ارکان کو آپس میں بدل کر باقی دو ارکان کی علامت تبدیل کر کے حاصل ہوتا ہے۔

مربعی قالب کا ضربی معکوس: کوئی قالب B ، قالب A کا ضربی معکوس ہوگا اگر $AB = I$ ہو۔

FUNDAMENTALS OF GEOMETRY

جیومیٹری کے بنیادی اصول

- ◀ زاویوں کی خصوصیات
- ◀ متماثل اور ایک جیسی اشکال
- ◀ چوکور
- ◀ متوازی خطوط
- ◀ متماثل مثلثیں
- ◀ دائرہ

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

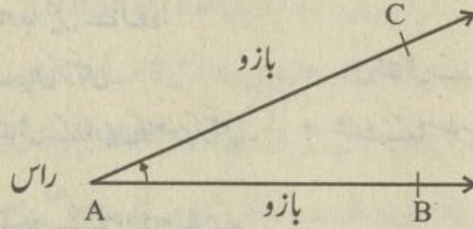
- ◀ متصلہ، سپلیمنٹری اور پلیمینٹری زاویوں کی تعریف بیان کر سکیں۔
- ◀ نامعلوم متصلہ، پلیمینٹری، سپلیمنٹری اور راسی متقابل کے زاویوں کو معلوم کر سکیں۔
- ◀ متوازی خطوط کی تعریف بیان کر سکیں۔
- ◀ دو خطوط جو ایک دیے گئے خط کے متوازی ہوں ایک دوسرے کے متوازی ہوتے ہیں۔
- ◀ اگر تین متوازی خطوط کو دو خطوط اس طرح قطع کریں کہ متوازی خطوط سے ایک خط قاطع پر مساوی قطعات بنیں تو اس طرح دوسرے خط پر بننے والے قطعات مساوی ہوتے ہیں۔
- ◀ اگر کوئی خط مثلث کے ایک ضلع کی تنصیف کرے اور دوسرے ضلع کے متوازی ہو تو وہ تیسرے ضلع کی بھی تنصیف کرے گا۔
- ◀ اشکال کی مدد سے درج ذیل متوازی خطوط کی خصوصیات کو ظاہر کر سکیں۔
- ◀ دو متوازی خطوط کو قطع کرنے والا ایک ترچھا خط کھینچے اور اس خط کے ایک ہی طرف متناظرہ زاویوں، متبادلہ اندرونی زاویوں، راسی متقابل کے زاویوں اور اندرونی زاویوں کو ظاہر کر سکیں۔
- ◀ جب ایک ترچھا خط دو متوازی خطوط کو قطع کرے تو زاویوں کے جوڑوں کے درمیان درج ذیل تعلق بیان کر سکیں۔
- ◀ متناظرہ زاویوں کے جوڑے برابر ہوتے ہیں۔ متبادلہ اندرونی زاویوں کے جوڑے برابر ہوتے ہیں۔ ترچھے خط کے ایک ہی طرف زاویے پلیمینٹری ہوتے ہیں انہیں اشکال سے بھی ظاہر کیجیے۔
- ◀ متماثل اور ایک جیسی اشکال کی شناخت کر سکیں۔
- ◀ دو مثلثوں کے درمیان متماثل ہونے کی خصوصیات کا اطلاق کر سکیں۔
- ◀ مربع کی درج ذیل خصوصیات کو ظاہر کر سکیں۔
- ◀ مربع کے چاروں اضلاع لمبائی میں برابر ہوتے ہیں۔
- ◀ مربع کے چاروں زاویے قائمہ زاویے ہوتے ہیں۔
- ◀ مربع کے دو ایک دوسرے کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں اور لمبائی میں برابر ہوتے ہیں۔
- ◀ مستطیل کی درج ذیل خصوصیات کو ظاہر کر سکیں۔
- ◀ مستطیل کے ہر دو مخالف اضلاع لمبائی میں برابر اور متوازی ہوتے ہیں۔
- ◀ مستطیل کے چاروں زاویے قائمہ زاویے ہوتے ہیں۔
- ◀ مستطیل کے دو ایک دوسرے کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔
- ◀ متوازی الاضلاع کی درج ذیل خصوصیات کو ظاہر کر سکیں۔
- ◀ متوازی الاضلاع کے ہر دو مخالف اضلاع لمبائی میں برابر اور متوازی ہوتے ہیں۔
- ◀ متقابلہ زاویے برابر ہوتے ہیں۔
- ◀ متوازی الاضلاع کے دو ایک دوسرے کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔
- ◀ دائرہ، اس کے مرکز، رداس، قطر، کاڈ قوس، بڑی قوس، چھوٹی قوس، نصف دائرہ اور دائرہ کے حصوں کو بیان کر سکیں۔
- ◀ درج ذیل خصوصیات کو ظاہر کر سکیں۔
- ◀ نصف دائرہ میں زاویہ قائمہ زاویہ ہوتا ہے۔
- ◀ دائرہ کے ایک ہی حصہ میں زاویے برابر ہوتے ہیں۔
- ◀ دائرہ کی چھوٹی قوس کا مرکزی زاویہ متناظرہ بڑی قوس کے مرکزی زاویہ کا دو گنا ہوتا ہے۔
- ◀ درج بالا خصوصیات کا جیومیٹری کی مختلف اشکال پر اطلاق کر سکیں۔

7.1 زاویوں کے خواص PROPERTIES OF ANGLES

زاویوں کے خواص کا مطالعہ کرنے سے پہلے آئیے ہم پچھلی جماعتوں میں جو کچھ پڑھا اس کا اعادہ کریں۔

زاویہ Angle

زاویہ دو ایسی شعاعوں کا یونین ہوتا ہے جو ایک مشترک نقطہ سے شروع ہوتی ہیں۔ یہ شعاعیں زاویے کے بازو اور مشترکہ نقطہ، زاویہ کا راس کہلاتا ہے۔



زاویہ کے نام یوں رکھے جاتے ہیں:

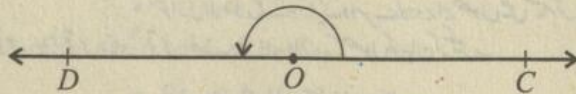
1- راس کے نام سے جیسا کہ $\angle A$

2- راس کے علاوہ دونوں بازوؤں کے ایک ایک نقطہ کو ساتھ ملا کر۔ اس میں نقطہ راس کو درمیان میں لکھا جاتا ہے۔

$\angle CAB$ یا $\angle BAC$

زاویہ مستقیم Straight Angle

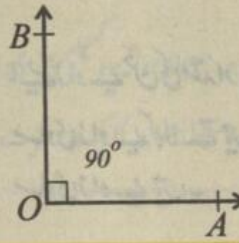
زاویہ مستقیم 180° کا ہوتا ہے اور یہ دو قائمہ زاویوں کے برابر ہوتا ہے۔ زاویہ مستقیم کے دونوں بازو مخالف اطراف میں کھلتے ہیں اور ایک خط مستقیم بناتے ہیں۔



زاویہ قائمہ Right Angle

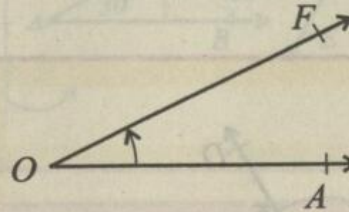
دی ہوئی شکل ایک قائمہ زاویہ کی ہے۔ قائمہ زاویہ 90° کا ہوتا ہے۔

$$m\angle AOB = 90^\circ$$



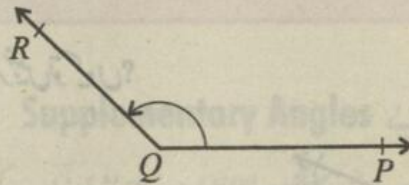
حادہ زاویہ Acute Angle

ایک حادہ زاویہ 0° سے بڑا اور 90° سے کم ہوتا ہے۔
زاویہ 'O' ایک حادہ زاویہ ہے۔



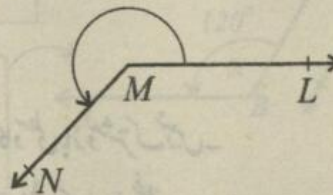
منفرجہ زاویہ Obtuse Angle

منفرجہ زاویہ 90° سے بڑا اور 180° سے چھوٹا ہوتا ہے۔ زاویہ Q ایک منفرجہ زاویہ ہے۔



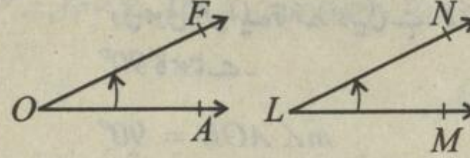
زاویہ منعکس Reflex Angle

زاویہ منعکس 180° سے بڑا اور 360° سے کم ہوتا ہے۔ زاویہ M ایک منعکس زاویہ ہے۔



مساوی زاویے Equal Angles

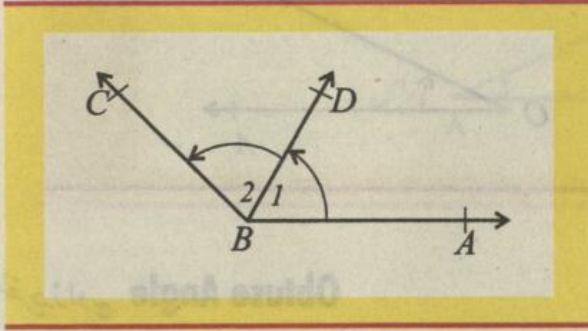
ایسے زاویے جن کی مقداریں مساوی ہوں،
مساوی زاویے کہلاتے ہیں۔ زاویہ 'O' اور 'L'
مساوی زاویے ہیں۔



Adjacent, Complementary and Supplementary Angles

7.1.1 متعلقہ، مکملیمٹری اور سپلیمنٹری زاویے

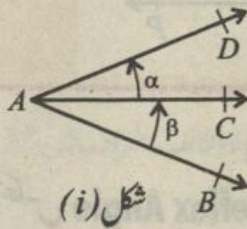
متعلقہ زاویے Adjacent Angles



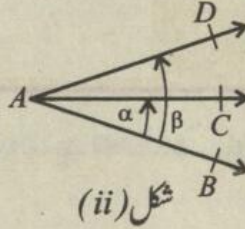
ایک ہی مشترکہ راس پر بننے والے دو زاویے جن کا
ایک بازو مشترک ہو۔ دی گئی شکل میں $\angle 1$ اور $\angle 2$
دو متعلقہ زاویے ہیں جن کا مشترکہ راس B اور
مشترکہ بازو BD ہے۔

مثال:-

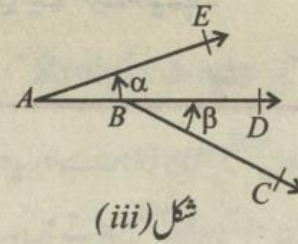
کیا نیچے دی گئی اشکال زاویے α اور β متعلقہ زاویے ہیں؟ اگر نہیں تو کیوں؟



شکل (i)



شکل (ii)



شکل (iii)

حل:

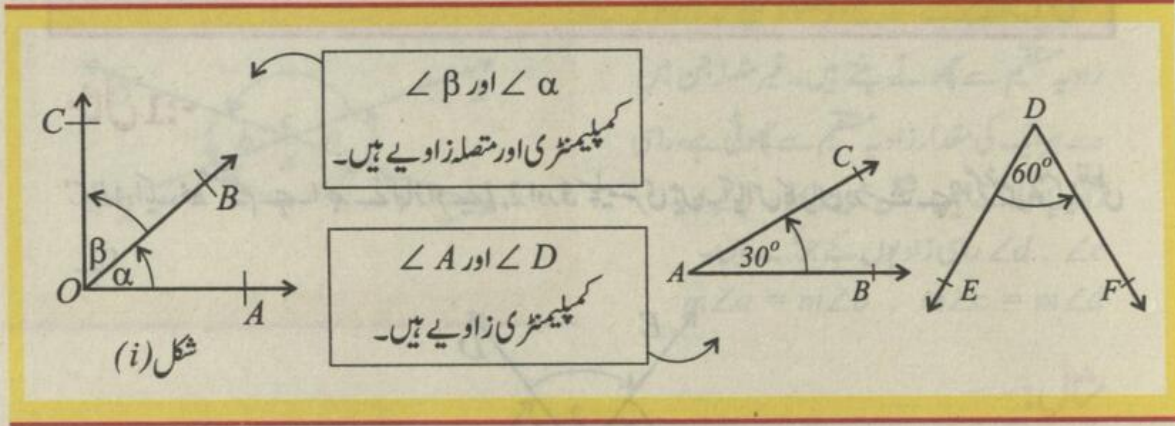
شکل (i) میں $\angle \alpha$ اور $\angle \beta$ متعلقہ زاویے ہیں۔

شکل (ii) میں $\angle \alpha$ اور $\angle \beta$ متعلقہ زاویے نہیں۔ کیونکہ ان کا وسطی بازو مشترک نہیں۔

شکل (iii) میں $\angle \alpha$ اور $\angle \beta$ متعلقہ زاویے نہیں کیونکہ ان میں مشترکہ راس نہیں۔

کمپلیمنٹری زاویے Complementary Angles

اگر دو زاویوں کا مجموعہ 90° ہو تو وہ کمپلیمنٹری زاویے کہلاتے ہیں۔ اگر دو زاویوں کا مجموعہ زاویہ قائمہ کے برابر یعنی 90° ہو (ضروری نہیں کہ وہ متصل ہوں) ایک دوسرے کے کمپلیمنٹ کہلاتے ہیں۔

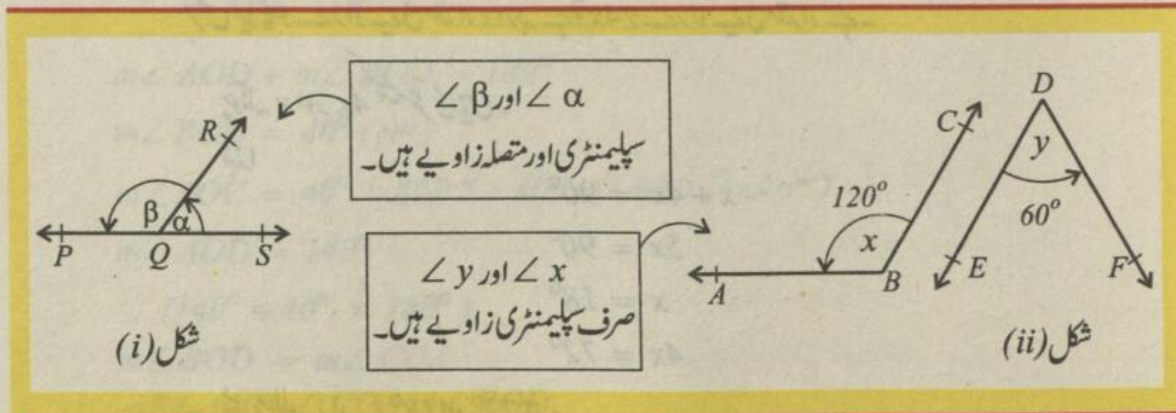


نوٹ:

اگر دو زاویے متصل اور کمپلیمنٹری ہوں تو ان کے بیرونی بازو ایک دوسرے پر عمود ہوتے ہیں۔
شکل (i) میں $\angle \alpha$ اور $\angle \beta$ متصل اور کمپلیمنٹری ہیں پس $\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{OA}$

سپلیمنٹری زاویے Supplementary Angles

ایسے دو زاویے جن کا مجموعہ 180° ہو، سپلیمنٹری زاویے کہلاتے ہیں۔ اگر دو زاویوں کا مجموعہ 180° ہو تو وہ ایک دوسرے کے سپلیمنٹ کہلاتے ہیں۔

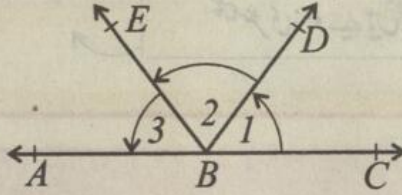


نوٹ:

اگر دو زاویے متضاد اور سپلیمنٹری ہوں تو ان کے بیرونی بازو خط مستقیم بناتے ہیں اور یوں ہی ہے۔
پچھلے صفحہ پر شکل (i) میں سے α اور β $\angle$ متضاد اور سپلیمنٹری زاویے ہیں۔ لہذا PQS ایک خط مستقیم ہے۔

مثال 1:-

ABC ایک خط مستقیم ہے۔ امجد نے کہا زاویے 1، 2 اور 3 سپلیمنٹری ہیں۔ آیا اس کا بیان درست ہے؟ اگر نہیں تو کیا غلطی ہے؟



حل:

نہیں۔ کیونکہ سپلیمنٹری زاویوں کی تعداد دو ہوتی ہے تین نہیں۔

مثال 2:-

اگر دو زاویے کمپلیمنٹری ہوں اور بڑا زاویہ چھوٹے زاویے کا چار گنا ہو تو ہر ایک زاویے کا درجہ کیا ہوگا؟

حل:

فرض کیا چھوٹے زاویے کی مقدار x درجہ ہے تو بڑے زاویے کی مقدار ہے۔

چونکہ x اور $4x$ کمپلیمنٹری ہیں۔

لہذا

$$x + 4x = 90^\circ$$

$$5x = 90^\circ$$

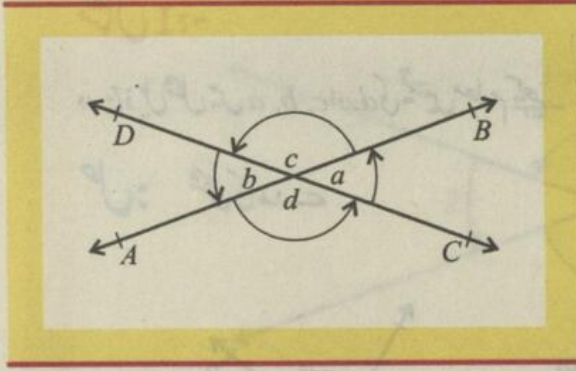
$$x = 18^\circ$$

$$4x = 72^\circ$$

پس مطلوبہ زاویے 18° اور 72° ہیں۔

7.1.2 راسی زاویے Vertical Angles

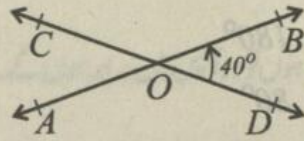
راسی زاویے ایسے دو زاویے ہوتے ہیں جو دو متقاطع خطوط سے بنتے ہیں اور جن میں سے ہر ایک مقدار، زاویہ مستقیم سے کم ہوتی ہے۔



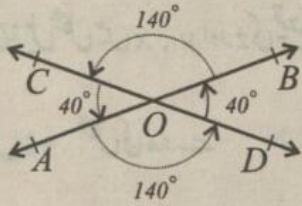
کسی ایک نقطہ پر سے متقاطع دو خطوط کھینچے۔ کتنے زاویے، زاویہ مستقیم سے چھوٹے بنتے ہیں۔ غیر متصلہ جن میں سے ہر ایک کی مقدار زاویہ مستقیم سے چھوٹی ہے، راسی زاویے کہلاتے ہیں۔ شکل میں $\angle a$ ، $\angle b$ اور $\angle c$ ، $\angle d$ راسی زاویوں کے جوڑے ہیں۔
 $m\angle a = m\angle b$ ، $m\angle c = m\angle d$

مثال:-

شکل میں نقطہ O پر دو متقاطع خطوط AB اور CD ہیں اور $m\angle BOD = 40^\circ$ بناتے ہیں۔ $\angle AOD$ اور $\angle AOC$ کی مقدار کیا ہوگی؟ آپ $\angle BOD$ اور $\angle COA$ کے متعلق کیا کہیں گے؟



حل:



چونکہ AOB ایک خط مستقیم ہے اور $\angle AOB = 180^\circ$ کے برابر ہے۔ لہذا

$$m\angle AOD + m\angle BOD = 180^\circ$$

$$m\angle BOD = 40^\circ \text{ (معلوم)}$$

$$m\angle AOC = 40^\circ \text{ (معلوم میں دیا گیا اور } \angle AOC \text{ و } \angle BOD \text{ صلیب متقابل ہیں)}$$

$$m\angle AOD = 140^\circ$$

$$\therefore (140^\circ + 40^\circ = 180^\circ)$$

$$m\angle BOD = m\angle COA$$

$\angle BOD$ اور $\angle COA$ راسی زاویے ہیں۔

7.1.3 نامعلوم زاویے حل کرنا Calculate Unknown Angles

آئیے درج ذیل مثالوں میں نامعلوم زاویے کو متصل، مکمل منٹری، سپلیمنٹری اور راسی زاویوں کی مدد سے معلوم کریں۔

مثال 1:-

درج ذیل شکل میں a , b , c اور d کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

حل:- شکل کی مدد سے

$$c + 40^\circ + 80^\circ = 180^\circ$$

$$c + 120^\circ = 180^\circ$$

$$c = 180^\circ - 120^\circ$$

$$c = 60^\circ$$

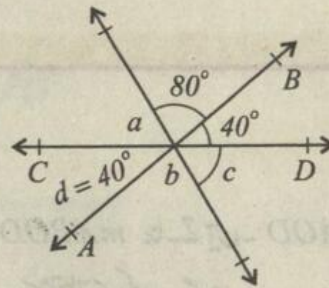
$$c = a = 60^\circ \text{ لیکن (راسی زاویے)}$$

$$a + d + b = 180^\circ \text{ اب}$$

$$60^\circ + 40^\circ + b = 180^\circ$$

$$100^\circ + b = 180^\circ$$

$$b = 80^\circ$$



مثال 2:-

درج ذیل شکل میں x , y اور z کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

حل:- شکل کی مدد سے

$$x + 50^\circ + 60^\circ = 180^\circ$$

$$x + 110^\circ = 180^\circ$$

$$x = 180^\circ - 110^\circ$$

$$x = 70^\circ$$

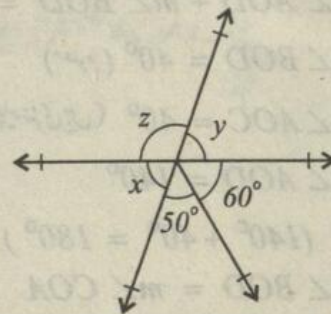
$$x = y \text{ لیکن (راسی زاویے)}$$

$$y = 70^\circ$$

$$y + z = 180^\circ \text{ اب}$$

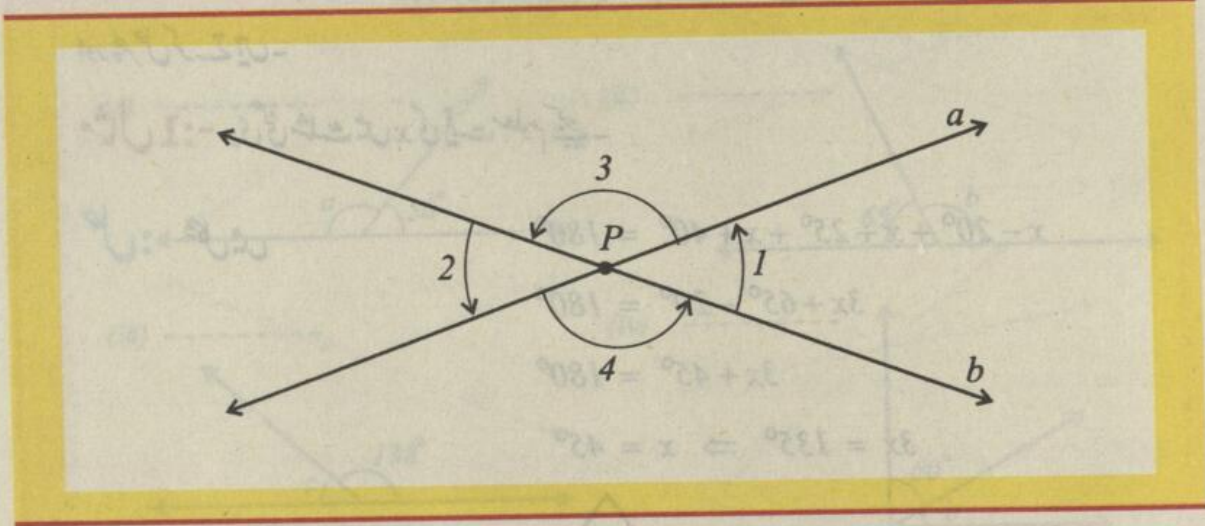
$$70^\circ + z = 180^\circ$$

$$z = 110^\circ$$



مسئلہ THEOREM

اگر دو خطوط مستقیم قطع کریں تو راسی زاویے برابر ہوتے ہیں۔



خطوط a اور b نقطہ P پر متقاطع ہیں اور $(\angle 1$ اور $\angle 2)$ اور $(\angle 3$ اور $\angle 4)$ راسی زاویوں کے جوڑے بناتے ہیں۔

اشارہ:

$\angle 1$ اور $\angle 2$ ایک ہی زاویہ کے سپلیمنٹ ہوں تو وہ آپس میں برابر ہوں گے۔

یاد رکھیے کہ:

- ◀ اگر دو زاویے ایک ہی زاویہ کے سپلیمنٹ ہوں تو وہ مساوی ہوتے ہیں۔
- ◀ اگر دو زاویے مساوی زاویوں کے سپلیمنٹ ہوں تو وہ مساوی ہوتے ہیں۔
- ◀ اگر دو خطوط مستقیم آپس میں قطع کریں تو راسی زاویے مساوی ہوتے ہیں۔
- ◀ اگر دو زاویے ایک ہی زاویہ کے سپلیمنٹ ہوں تو وہ مساوی ہوتے ہیں۔

Calculate Unknown Angles of a Triangle

7.1.4 کسی مثلث کے نامعلوم زاویوں کو حل کرنا

کسی مثلث کے نامعلوم زاویوں کی مقدار معلوم کرنے کے لیے، ہم درج ذیل مثالوں کو مد نظر رکھتے ہیں اور پھر حل کرتے ہیں۔

مثال 1:- دی گئی مثلث میں x کی قیمت معلوم کیجیے۔

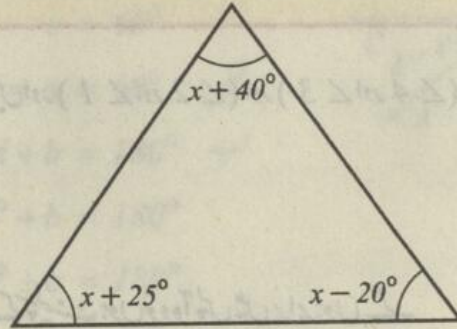
حل: شکل میں

$$x - 20^\circ + x + 25^\circ + x + 40^\circ = 180^\circ$$

$$3x + 65^\circ - 20^\circ = 180^\circ$$

$$3x + 45^\circ = 180^\circ$$

$$3x = 135^\circ \Rightarrow x = 45^\circ$$



پس تینوں زاویے معلوم ہوتے ہیں۔ $x - 20^\circ = 45^\circ - 20^\circ = 25^\circ$

$$x + 25^\circ = 45^\circ + 25^\circ = 70^\circ$$

$$x + 40^\circ = 45^\circ + 40^\circ = 85^\circ$$

مثال 2:- دی گئی مثلث میں x معلوم کریں۔

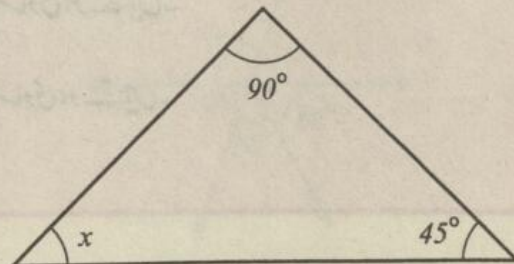
حل: ہم جانتے ہیں کہ

$$x + 45^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

$$x + 135^\circ = 180^\circ$$

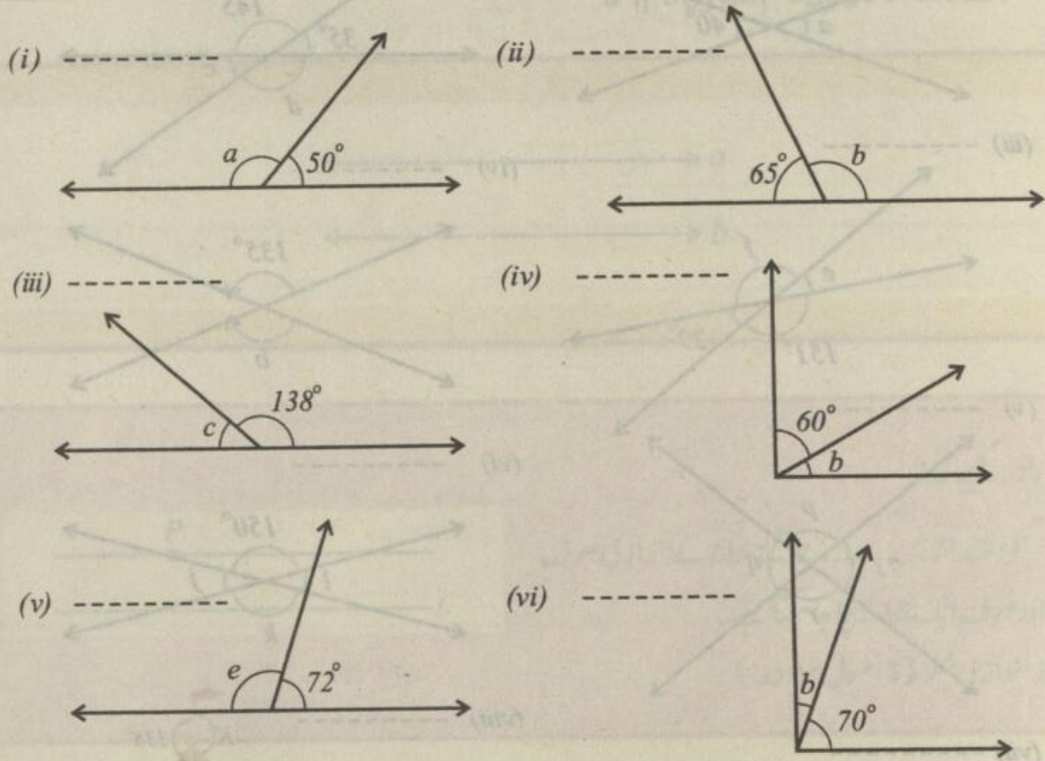
$$x = 180^\circ - 135^\circ$$

$$x = 45^\circ$$



مشق 7.1

1- دیے گئے زاویوں کی مقداریں لکھیے اور دیکھیے کہ یہ کپلیمنٹری ہیں یا کہ سپلیمنٹری؟

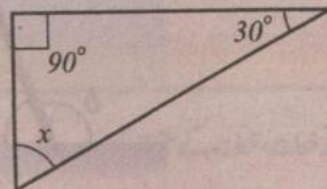


2- دو زاویے سپلیمنٹری ہیں اور بڑا زاویہ چھوٹے زاویے سے 30° بڑا ہے۔ ہر ایک زاویہ کی مقدار کتنی ہے؟

3- اگر کسی زاویے میں 40° جمع کیا جائے تو حاصل شدہ زاویہ، پہلے والے زاویے کے سپلیمنٹ کے برابر آتا ہے۔ پہلے والے زاویہ کی مقدار معلوم کریں۔

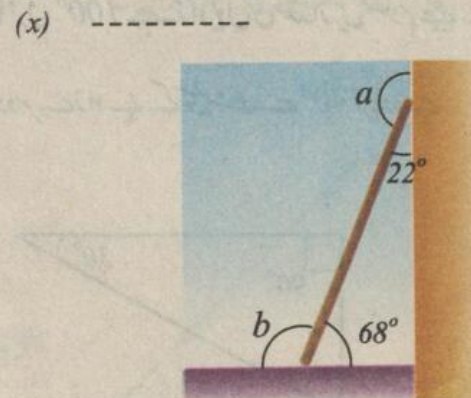
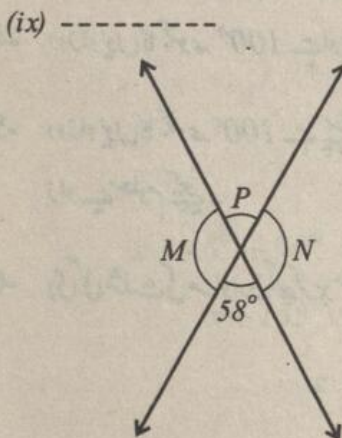
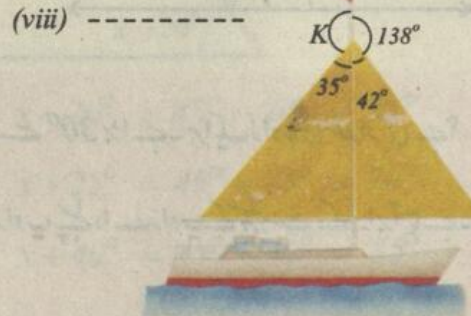
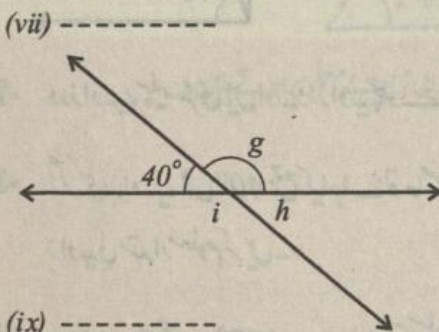
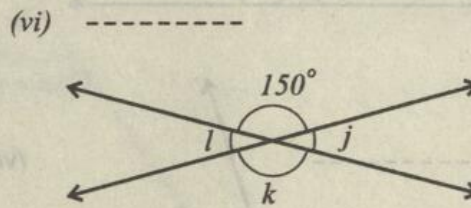
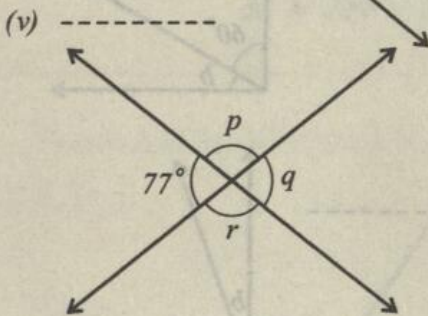
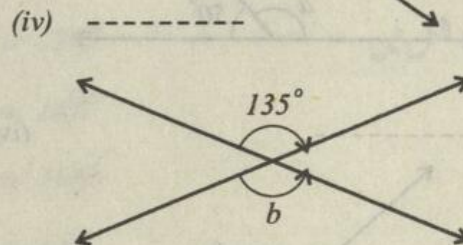
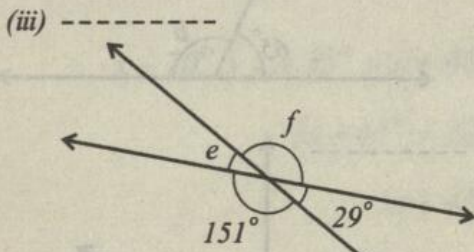
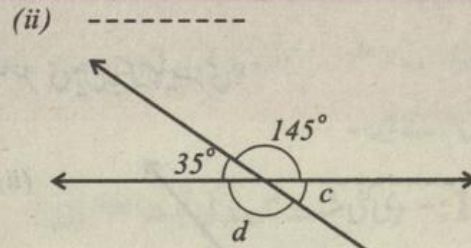
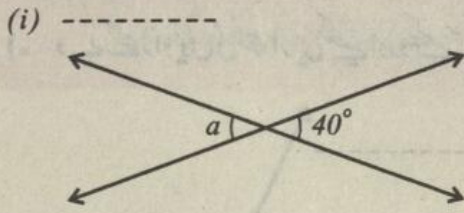
4- دو زاویوں کا مجموعہ 100° ہے اور ان کے سپلیمنٹوں کا فرق 100° ہے۔ زاویوں کی مقداریں معلوم کیجیے۔

5- دو زاویوں کا مجموعہ 100° ہے پہلے زاویہ کا سپلیمنٹ دوسرے زاویے کے سپلیمنٹ سے 40° زیادہ ہے۔ زاویے معلوم کیجیے۔



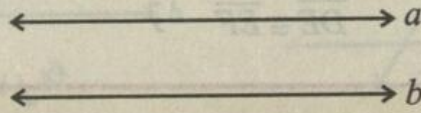
6- دی گئی مثلث کی مساوات لکھ کر x معلوم کریں۔

7- حروف تہجی سے ظاہر شدہ زاویوں کی قیمتیں معلوم کریں۔

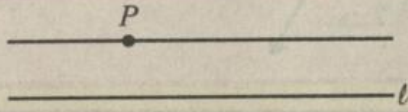


7.2 متوازی خطوط PARALLEL LINES

ایک ہی مستوی میں واقع ایسے دو خطوط جو کبھی نہ ملیں، متوازی خطوط کہلاتے ہیں۔
خطوط a اور b متوازی ہیں۔ ہم لکھتے ہیں $a \parallel b$



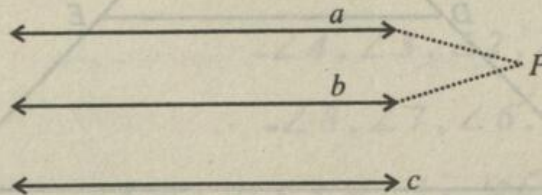
یاد رکھیے کہ:



کسی نقطہ P میں سے دیے گئے خط l کے متوازی صرف
اور صرف ایک خط کھینچا جاسکتا ہے۔
(متوازی خطوط کا اصول موضوعہ)

7.2.1 متوازی خطوط کے خواص Properties Of Parallel Lines

(a) دو خطوط جو کسی تیسرے خط کے متوازی ہوں، آپس میں بھی متوازی ہوتے ہیں۔



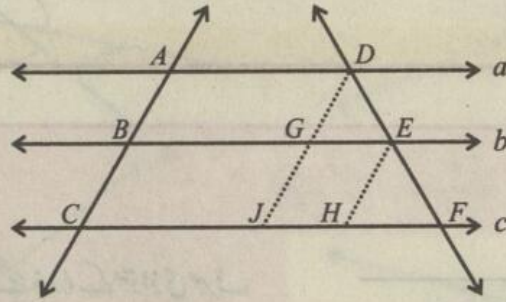
خط ' a ' کے متوازی ہے۔ خط b ، خط c کے متوازی ہے تو خط a ، خط c کے متوازی ہے۔ اگر $a \parallel b$ اور $b \parallel c$ ۔

(b) اگر تین متوازی خطوط کو دو خطوط اس طرح قطع کریں کہ متوازی خطوط سے ایک خط قاطع پر مساوی قطعات بنیں تو اس طرح دوسرے خط پر بننے والے قطعات مساوی ہوتے ہیں۔

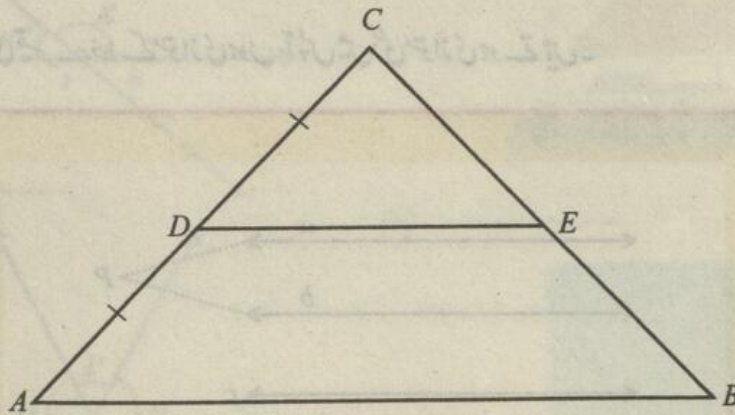
یعنی اگر $\overline{AD} \parallel \overline{BE} \parallel \overline{CF}$
 $\overline{AC}$ اور $\overline{DF}$ کوئی سے خط قاطع ہیں۔

اور $\overline{AB} \cong \overline{BC}$

تو $\overline{DE} \cong \overline{EF}$



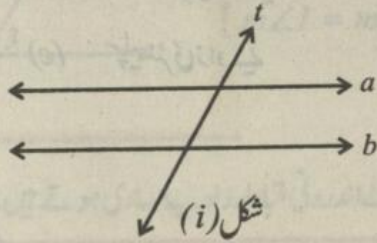
(c) اگر کوئی خط مثلث کے ایک ضلع کی تنصیف کرے اور دوسرے ضلع کے متوازی ہو تو وہ تیسرے ضلع کی بھی تنصیف کرے گا۔



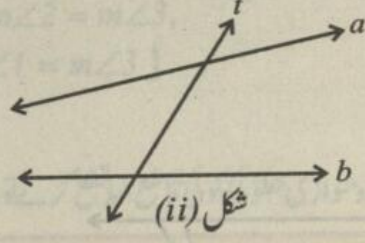
یعنی اگر ΔABC میں $\overline{CD} \cong \overline{DA}$ اور $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ ہو تو $\overline{CE} \cong \overline{EB}$

7.2.2 قاطع خط Transversal

قاطع خط ایسا خط ہوتا ہے جو خطوط کو مختلف نقاط پر قطع کرے۔



شکل (i)

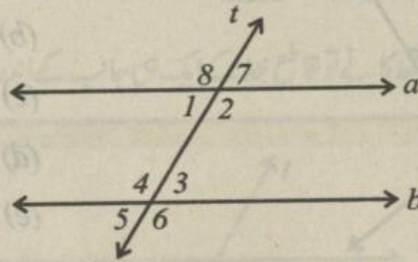


شکل (ii)

نوٹ:

شکل (i) اور (ii) میں قاطع خط "t" دو خطوط a اور b کو قطع (کاٹتے) کرتے ہیں۔
خط قاطع تین یا زیادہ خطوط کو ہر ایک پر ایک ایک نقطہ پر قطع کرتا ہے۔

اگر کوئی خط "t" دو متوازی خطوط a اور b کو قطع کرے تو بننے والے زاویوں کے نام درج ذیل طریقے سے دیے جاتے ہیں۔



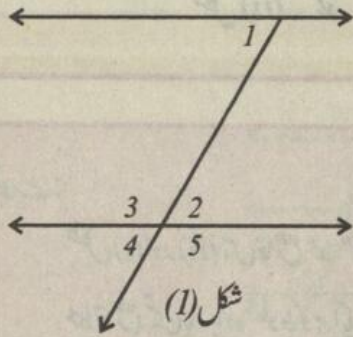
- 1- چار اندرونی زاویے $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$ ۔
- 2- چار بیرونی زاویے $\angle 5, \angle 6, \angle 7, \angle 8$ ۔
- 3- دو اندرونی متبادلہ زاویوں کے جوڑے $\angle 1$ اور $\angle 3$; $\angle 2$ اور $\angle 4$ ۔
- 4- دو بیرونی متبادلہ زاویوں کے جوڑے $\angle 5$ اور $\angle 7$; $\angle 6$ اور $\angle 8$ ۔
- 5- قاطع خط کے ساتھ ایک ہی جانب والے اندرونی زاویوں کے جوڑے $\angle 1$ اور $\angle 3$; $\angle 2$ اور $\angle 4$ ۔
- 6- متناظرہ زاویوں کے چار جوڑے $\angle 1$ اور $\angle 5$; $\angle 2$ اور $\angle 6$; $\angle 3$ اور $\angle 7$; $\angle 4$ اور $\angle 8$ ۔

مثال :- نیچے دی گئی اشکال کو دیکھ کر درج ذیل سوالات کے جوابات دیجیے۔

- (a) اندرونی متبادلہ زاویے
(b) متناظرہ زاویے
(c) کمپلیمنٹری زاویے
(d) راسی زاویے
(e) سپلیمنٹری زاویے

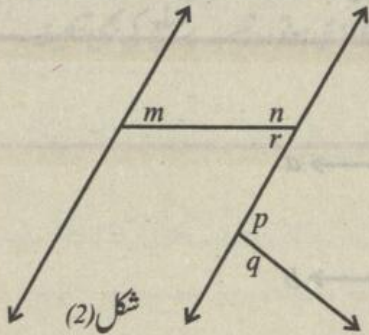
حل:

شکل 1 میں



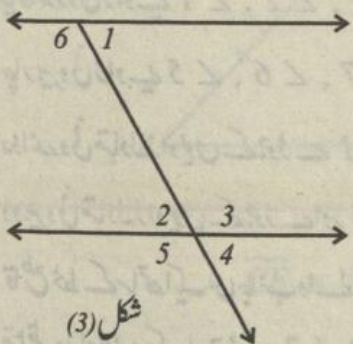
- (a) $\angle 1, \angle 2$
(b) $\angle 1, \angle 4$
(c) کوئی نہیں
(d) $\angle 3, \angle 5; \angle 2, \angle 4$
(e) $\angle 3, \angle 2; \angle 2, \angle 5;$
 $\angle 5, \angle 4; \angle 4, \angle 3$

شکل 2 میں



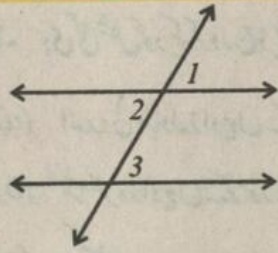
- (a) $\angle m, \angle r; \angle r, \angle p$
(b) کوئی نہیں
(c) کوئی نہیں
(d) کوئی نہیں
(e) $\angle n, \angle r; \angle p, \angle q$

شکل 3 میں



- (a) $\angle 1, \angle 2; \angle 3, \angle 6$
(b) $\angle 1, \angle 4; \angle 5, \angle 6$
(c) کوئی نہیں
(d) $\angle 2, \angle 4; \angle 3, \angle 5$
(e) $\angle 2, \angle 3; \angle 3, \angle 4;$
 $\angle 4, \angle 5; \angle 2, \angle 5$

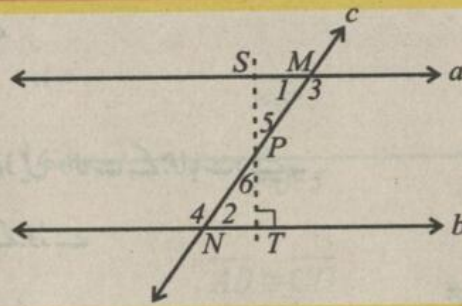
7.2.3 زاویوں کے جوڑوں میں تعلق Relation Between the Pairs of Angles



اگر دو متوازی خطوط کو کوئی خط قطع کرے تو اس سے بننے والے متناظرہ زاویے مساوی ہوتے ہیں۔

$$[m\angle 1 = m\angle 2, m\angle 2 = m\angle 3, \therefore m\angle 1 = m\angle 3]$$

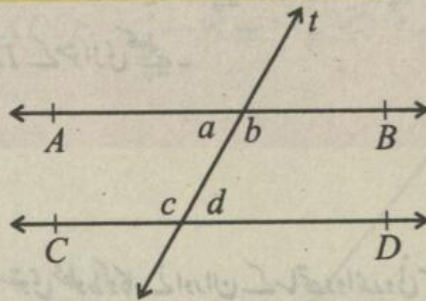
(d) اگر دو متوازی خطوط کو کوئی قاطع خط قطع کرے تو بننے والے اندرونی متبادلہ زاویے مساوی ہوتے ہیں۔



$a \parallel b$ دو متوازی خطوط a اور b کو قاطع خط c نقاط M اور N پر بالترتیب کاٹتا ہے جس سے متبادلہ اندرونی زاویوں کے جوڑے $(\angle 1, \angle 2)$ اور $(\angle 3, \angle 4)$ بننے ہیں۔

$$m\angle 3 = m\angle 4 \text{ اور } m\angle 1 = m\angle 2$$

(e) اگر دو متوازی خطوط کو قاطع خط کاٹے تو قاطع خط کے ایک ہی جانب کے اندرونی زاویے سپلیمنٹری ہوتے ہیں۔



$AB \parallel CD$ دو متوازی خطوط کو قاطع خط t کاٹتا ہے۔

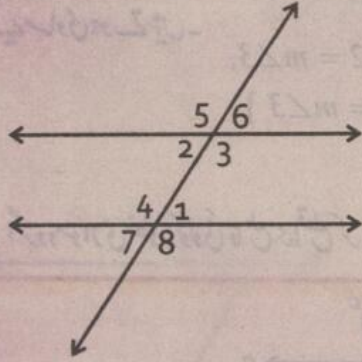
زاویے a, b, c اور d بننے ہیں۔

$$m\angle b + m\angle d = 180^\circ$$

$$m\angle a + m\angle c = 180^\circ$$

مشق 7.2

1- دی گئی شکل کو دیکھ کر درج ذیل سوالات کے جوابات دیجیے۔



(a) اندرونی متبادلہ زاویوں کے جوڑے

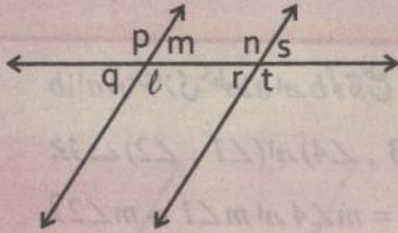
(b) متناظرہ زاویوں کے جوڑے

(c) کمپلیمنٹری زاویوں کے جوڑے

(d) سپلیمنٹری زاویوں کے جوڑے

(e) راسی زاویوں کے جوڑے

2- دی گئی شکل کو دیکھیے اور درج ذیل سوالات کے جوابات دیجیے۔



(a) اندرونی متبادلہ زاویوں کے جوڑے

(b) متناظرہ زاویوں کے جوڑے

(c) کمپلیمنٹری زاویوں کے جوڑے

(d) سپلیمنٹری زاویوں کے جوڑے

(e) راسی زاویوں کے جوڑے

3- خط $\overline{DE}$ سے باہر نقطہ لیجیے۔ X سے گزرتا ہوا ایسا خط کھینچیے جو $\overline{DE}$ کو نقطہ پر کاٹتا ہو اور متماثل متناظرہ زاویے بناتے ہوئے اس نقطہ میں $\overline{DE}$ کے متوازی کھینچیے۔

نوٹ کیجیے کہ:

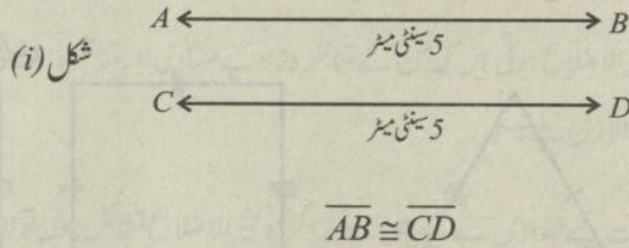
اگر کوئی قاطع خط دو ہم مستوی خطوط کو کاٹے اور ان کے ساتھ دو اندرونی سپلیمنٹری زاویوں کے جوڑے بنائے تو وہ دونوں خطوط متوازی ہوتے ہیں۔

7.3 متماثل اور متشاکل اشکال CONGRUENT AND SIMILAR FIGURES

7.3.1 متماثل اشکال Congruent Figures

لفظ ”متماثل“ لاطینی لفظ ہے جس کے معنی ”باہم رضامند“ ہیں۔ دو ہندسی اشکال جن کی جسامت یکساں اور ہم شکل ہوں متماثل کہلاتی ہیں۔

ایک شکل دوسری شکل کے متماثل ہے۔ متماثل کی علامت $\cong$ ہے۔ پس دو خط متماثل ہوں گے اگر ان کی لمبائیاں ایک جیسی ہوں گی۔

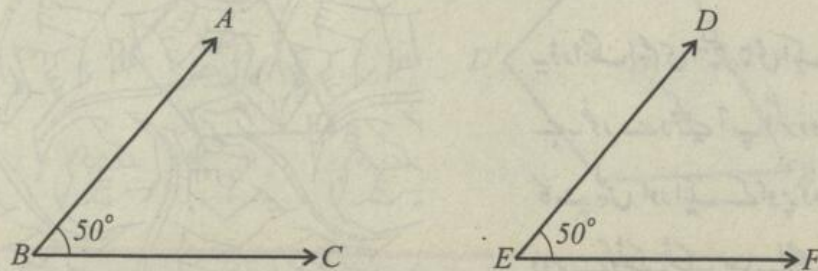


تمام قطع خط سیدھے ہونے کی بنیاد پر ہم شکل ہوتے ہیں۔ ان کی جسامت یکساں ہوگی اگر ان کی لمبائیاں ایک جیسی ہوں۔

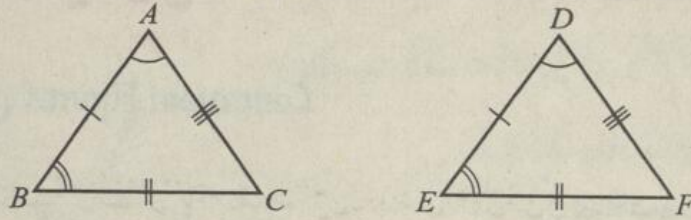
مندرجہ بالا شکل میں سینٹی میٹر 5 $m\overline{AB} = m\overline{CD}$ لہذا $\overline{AB}$ اور $\overline{CD}$ کی ایک جیسی جسامت کے ہیں۔

◀ دو قطعات جن کی لمبائیاں برابر ہوں متماثل قطعات کہلاتے ہیں۔ شکل (i) میں $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

◀ دو زاویے مقدار میں برابر ہوں تو وہ متماثل زاویے کہلاتے ہیں۔ $\angle ABC \cong \angle DEF$



◀ مثلثان جن کے متناظرہ حصے متماثل ہوں، متماثل مثلثان کہلاتی ہیں۔

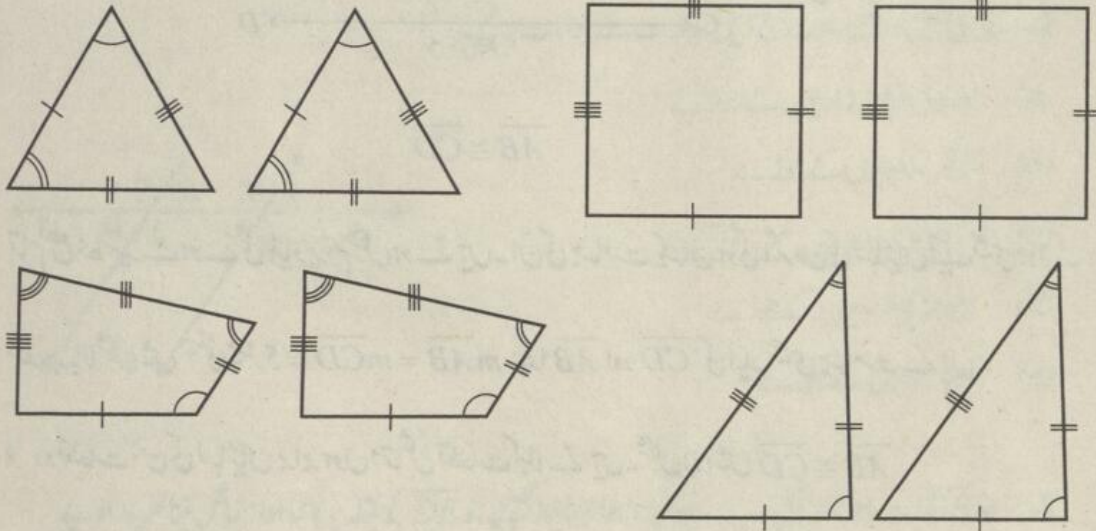


$$\overline{AB} \cong \overline{DE}, \overline{BC} \cong \overline{EF}, \overline{AC} \cong \overline{DF}$$

$$m\angle A = m\angle D, m\angle B = m\angle E, m\angle C = m\angle F \text{ اور}$$

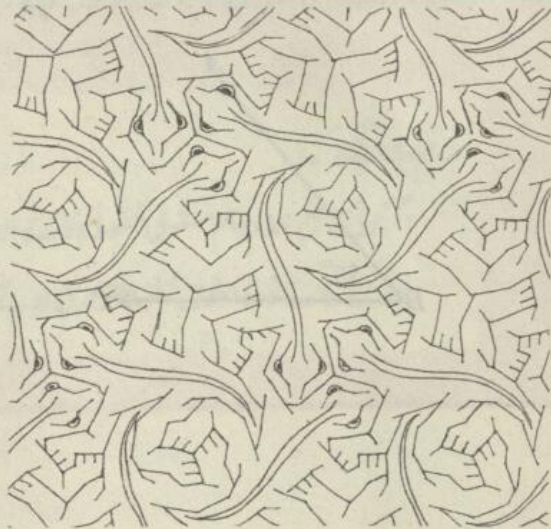
$$\Delta ABC \cong \Delta DEF$$

دو کثیر الاضلاع جن کے راسوں کے جوڑے اس طرح بنائے جائیں کہ متناظرہ زاویے اور اضلاع متماثل ہوں تو وہ متماثل کثیر الاضلاع کہلاتی ہیں۔

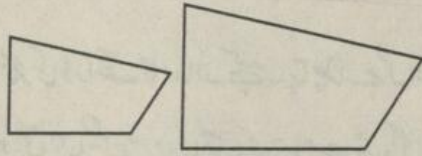


یہ ڈرائنگ ایم سی اسپر نامی ایک فن کار نے بنائی ہے۔ غور سے دیکھیے آپ اگر دو ہم شکل حصوں کو کاٹ لیں اور ایک کے اوپر دوسرے کو رکھیں تو دوسرے کو ٹھیک ٹھیک چھپا لے گا۔

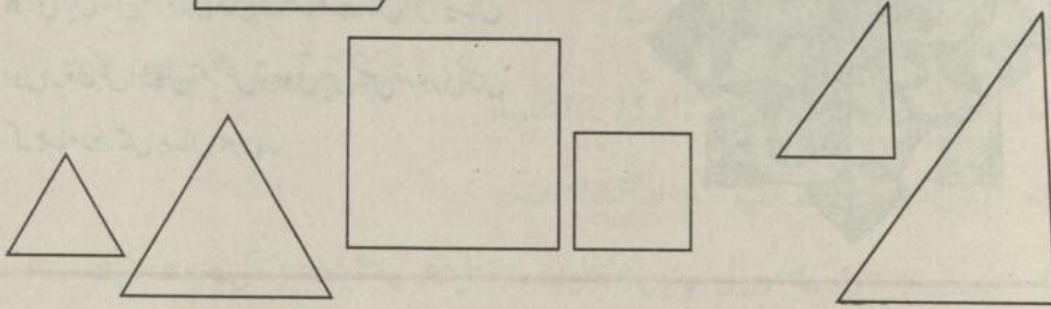
متماثل اشکال سائز اور شکل میں ایک جیسی ہوتی ہے۔



Similar Figures متشاکل اشکال



نیچے دی گئی کثیر الاضلاع میں ہر جوڑا آپس میں متشاکل ہے۔

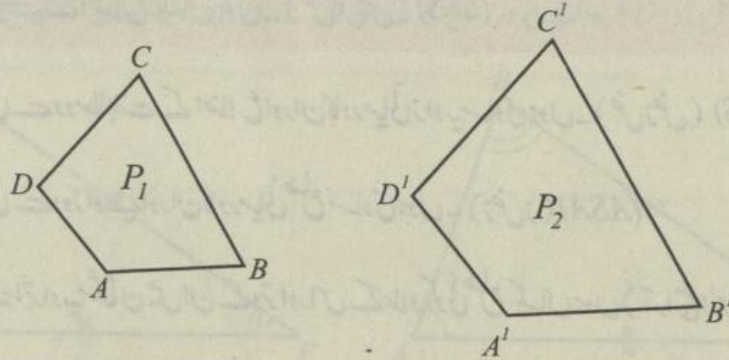


متشاکل کثیر الاضلاع ایسی کثیر الاضلاع ہوتی ہیں کہ جن کے متناظرہ زاویے مساوی اور متناظرہ اضلاع تناسب میں ہوں۔
یاد رہے کہ دونوں شرائط کا ہونا لازمی ہے۔

چونکہ تعریف کا عکس بھی درست ہے لہذا اس سے یہ عیاں ہے کہ اگر دو کثیر الاضلاع متشاکل ہوں تو ان کے متناظرہ زاویے مساوی ہوتے ہیں اور ان کے متناظرہ اضلاع تناسب ہوتے ہیں۔

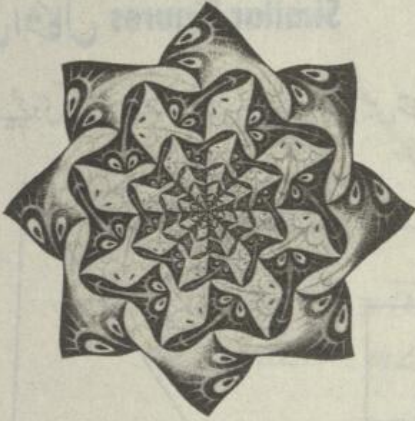
متشاکل، متماثل کی طرح ایک خاص قسم کی مطابقت میں ہوتی ہے۔

اگر کثیر الاضلاع P_1 ، کثیر الاضلاع P_2 کے متشاکل ہو $P_1 \sim P_2$ لکھا جاتا ہے۔



$$1- m\angle A = m\angle A', m\angle B = m\angle B' \\ m\angle C = m\angle C', m\angle D = m\angle D'$$

$$2- \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DA}{D'A'}$$



الپھر کی ڈرائنگ کا مطالعہ کیجئے۔ پتا چلتا ہے کہ اشکال ہم شکل تو ہو سکتی ہیں لیکن ضروری نہیں کہ جسامت میں بھی یکساں ہوں۔ متشاکل اشکال ہم شکل تو ہوتی ہیں لیکن ضروری نہیں کہ جسامت میں یکساں ہوں۔

7.3.2 علامت ($\cong$) Symbol

علامت ($\cong$) دو ہندسی اشکال جن کی جسامت اور شکل یکساں ہوں متماثل اشکال کہلاتی ہیں۔ تماش کی علامت ($\cong$) ہے۔

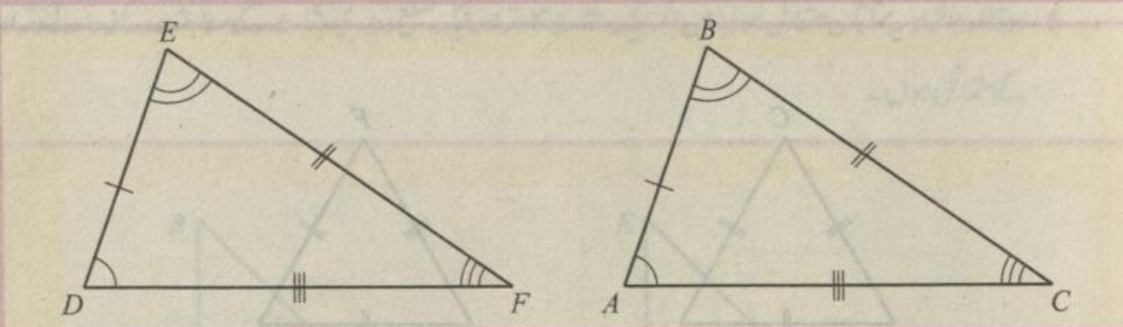
7.3.3 تماش کی خصوصیات

1. متماثل اشکال ہر لحاظ سے یکساں ہوتی ہیں یعنی کہ ان کی شکل یکساں اور جسامت بھی یکساں ہوتی ہے۔
2. مثلثان متماثل ہوتی ہیں اگر ان پر درج ذیل میں سے کوئی ایک بھی شق لاگو ہو۔
 - (a) مطابقت کے اضلاع یکساں ہوں۔ (ض ض ض) (SSS)
 - (b) کوئی سے دو مطابقت کے اضلاع اور ان کا درمیانی زاویہ مساوی ہوں۔ (ض ض ض) (SAS)
 - (c) کوئی سے دو زاویے اور ان کا درمیانی ضلع مساوی ہوں۔ (ض ض ز) (ASA)
 - (d) قائمہ الزاویہ مثلثان میں ان کے وتر اور اس کے علاوہ کوئی ضلع یکساں ہوں (آراج ایس) (RHS)
3. دائرے جن کے رداس متماثل ہوں، متماثل دائرے کہلاتے ہیں۔
4. دو زاویے جن کی پیمائش یکساں ہو۔ متماثل زاویے کہلاتے ہیں۔

مشق 7.3

سوال 1-3 تک کیا بننے والی اشکال متشاکل ہیں؟

- 1- تمام مربع، تمام مستطیل، تمام باقاعدہ مسدس
- 2- دو مستطیلیں جن کے اضلاع 8، 12 اور 15، 10 ہوں۔
- 3- دو معین اشکال جن کے زاویے 35° اور 125° ہوں۔
- 4- ایک کثیر الاضلاع کے ضلعوں کی لمبائیاں 8 سینٹی میٹر، 7 سینٹی میٹر، 6 سینٹی میٹر، 5 سینٹی میٹر، 4 سینٹی میٹر اور 9 سینٹی میٹر ہیں۔ اس کے متشاکل کثیر الاضلاع 6 سینٹی میٹر لمبے ضلع کے مطابق ضلع کی لمبائی 12 سینٹی میٹر ہے۔ دوسری کثیر الاضلاع کے باقی ضلعوں کی لمبائیاں معلوم کیجیے۔
- 5- ایک چوکور میں اضلاع کی لمبائیاں 2 سینٹی میٹر، 4 سینٹی میٹر، 5 سینٹی میٹر، 6 سینٹی میٹر اور 7 سینٹی میٹر ہیں۔ اس کے متشاکل چوکور میں سب سے بڑے ضلع کی لمبائی 21 سینٹی میٹر ہے۔ دوسرے اضلاع کی لمبائیاں معلوم کریں۔
- 6- ایک کثیر الاضلاع کے اضلاع کی لمبائیاں 5 سینٹی میٹر، 2 سینٹی میٹر، 7 سینٹی میٹر، 3 سینٹی میٹر اور 4 سینٹی میٹر ہیں۔ اس کے متشاکل اضلاع کے فیصلوں کی لمبائیاں معلوم کریں جبکہ پہلی والی کے 2 سینٹی میٹر لمبائی والے ضلع کے مقابلہ میں اس کے ضلع کی لمبائی 6 سینٹی میٹر ہو۔ دونوں کثیر الاضلاع احاطوں میں کیا نسبت ہوگی؟
- 7- درج ذیل شکل میں متناظرہ اضلاع اور زاویوں کے جوڑوں کے نام لکھیے جو آپس میں متماثل ہیں۔



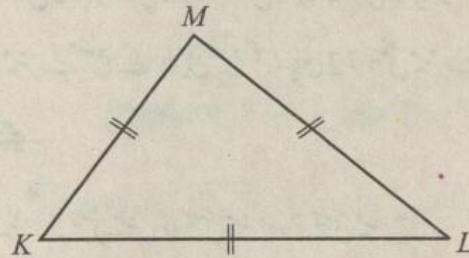
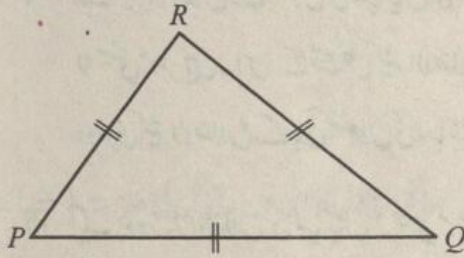
8- کیا تمام متشاکل اشکال متماثل بھی ہوتی ہیں؟ واضح کریں۔

9- کیا تمام متماثل اشکال متشاکل بھی ہوتی ہیں؟ واضح کریں۔

7.4 متماثل مثلثان CONGRUENT TRIANGLES

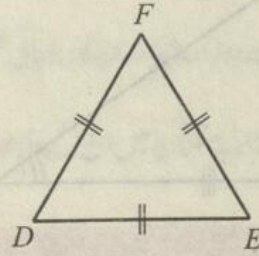
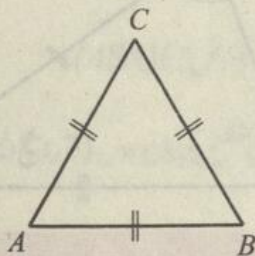
دو ایسی مثلثان متماثل مثلثان ہوتی ہیں کہ جن کے راسوں کے جوڑے بنانے کے بعد اگر ان کے متناظرہ حصوں کی مطابقت لی جائے (زاویوں اور ضلعوں کی) تو وہ برابر ہوتے ہیں۔

نیچے شکل کو علامتی طور پر یوں لکھتے ہیں۔ $\Delta PQR \cong \Delta KLM$ جس کا مطلب ہے مثلث PQR مثلث KLM کے متماثل ہے۔



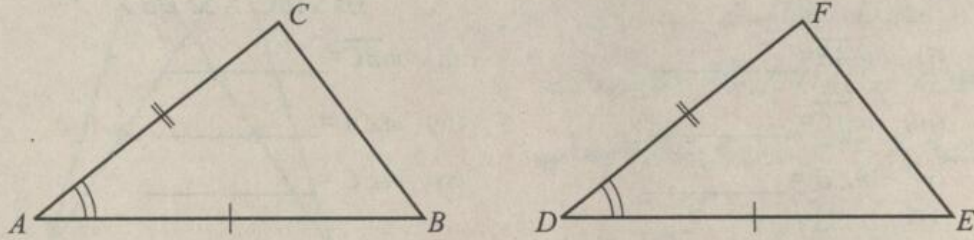
دو مثلثان کے درمیان تماثل کی خصوصیات

◀ کسی دی گئی مطابقت میں دو مثلثان متماثل ہوتی ہیں اگر پہلی مثلث کے تمام اضلاع دوسری مثلث کے مطابقت رکھنے والے تمام اضلاع کے برابر ہوں۔ (ض ض ض $\cong$ ض ض ض) ($SSS \cong SSS$)

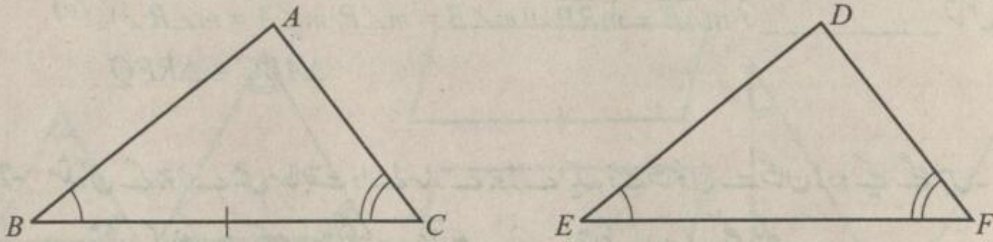


درج بالا شکل میں ΔABC اور ΔDEF متماثل ہیں۔

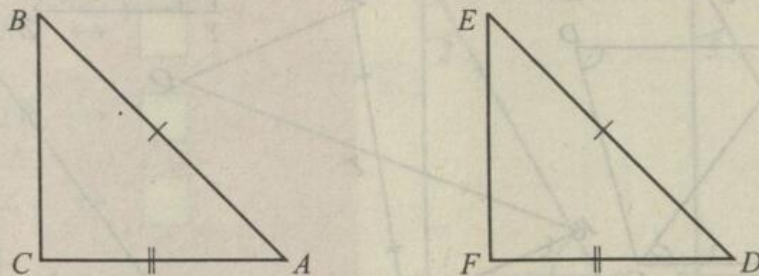
◀ دو مثلثان آپس میں متماثل ہوتی ہیں اگر ایک مثلث کے دو اضلاع اور ان کا درمیانی زاویہ، دوسری مثلث کے مطابقت رکھنے والے دو اضلاع اور درمیانی زاویہ کے برابر ہوں۔ (ض رض $\cong$ ض رض) ($SAS \cong SAS$)



◀ دو مثلثان متماثل ہوتی ہیں اگر ایک مثلث کے دو زاویے اور درمیانی ضلع دوسری مثلث کے مطابقت رکھتے دو زاویوں اور ان کے درمیانی ضلع کے متماثل ہوں۔ (رض ز $\cong$ رض ز) ($ASA \cong ASA$)



◀ دو قائمہ الزاویہ مثلثان متماثل ہوتی ہیں اگر ایک مثلث کا وتر اور ایک ضلع دوسری مثلث کے مطابقت رکھنے والے وتر اور ضلع کے متماثل ہوں۔



مشق 7.4

1- خالی جگہوں کو پر کیجیے۔

(a) اگر $\triangle ABC \cong \triangle FDE$ ہو تو

(i) $m\overline{AB} =$ _____

(ii) $m\overline{BC} =$ _____

(iii) $m\overline{AC} =$ _____

(iv) $m\angle A =$ _____

(v) $m\angle B =$ _____

(vi) $m\angle C =$ _____

(b) مثلث PQR میں اضلاع PR اور QR کا درمیانی زاویہ _____ ہے۔(c) مثلث DEF میں $\angle E$ اور $\angle F$ کے درمیان والا ضلع _____ ہے۔(d) اگر $\overline{AB} = \overline{QP}$ ، $m\angle B = m\angle P$ ، $m\overline{BC} = m\overline{PR}$ تو متماثل کی حالت _____ کی رو سے

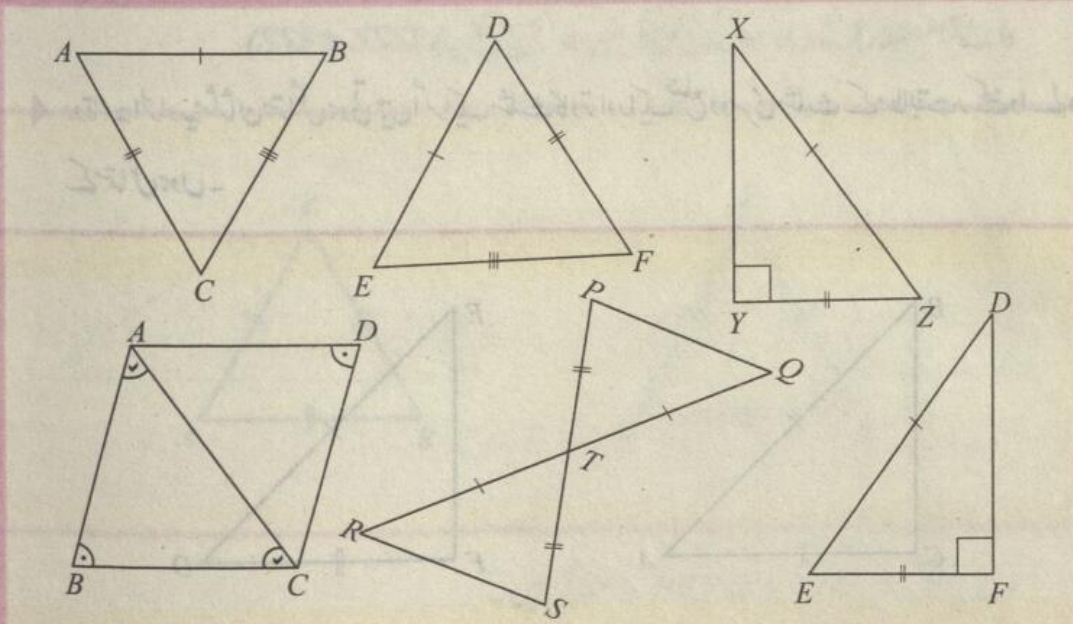
$\triangle ABC \cong \triangle QPR$

(e) اگر $m\angle A = m\angle R$ ، $m\angle B = m\angle P$ اور $m\overline{AB} = m\overline{RP}$ تو متماثل کی رو سے

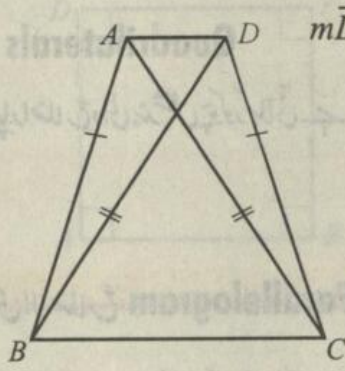
$\triangle ABC \cong \triangle RPQ$

2- مثلثان کے جوڑے میں مطابقت والے سارے جوڑے ایک جیسے نشانوں سے نشان زدہ کیے گئے ہیں۔

ان مثلثان کی نشاندہی کیجئے جو متماثل بن جاتی ہیں۔ ان کے متماثل کی علامات بھی لکھیے۔



3- شکل میں ABC اور DBC ایک ہی قاعدہ $\overline{BC}$ پر دو



مثان ہیں اس طرح سے کہ $m\overline{AB} = m\overline{DC}$ اور $m\overline{AC} = m\overline{DB}$

جبکہ A اور D ، BC ایک ہی جانب واقع ہیں۔ مثان

ADB اور DAC میں متناظرہ مطابقت والے

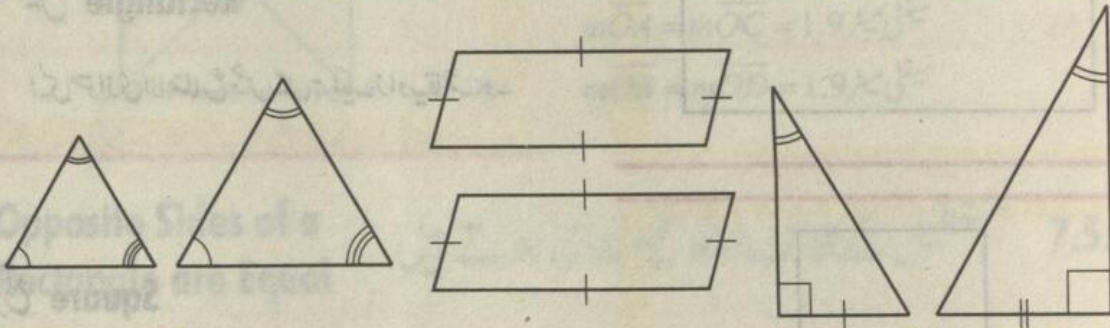
حصے اس طرح لکھیں کہ ان میں تماثل قائم ہو آپ

اس تماثل کے لیے کوئی حالت کہیں گے؟

اگر $m\angle BAD = 100^\circ$ اور $m\angle DCA = 40^\circ$ تو

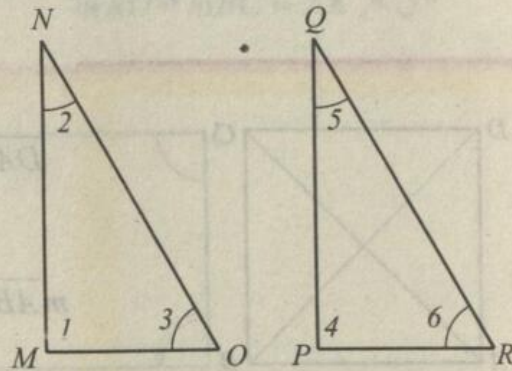
$\angle ADB$ کی مقدار معلوم کریں۔

4- ان اشکال میں تماثل، متشکل یا کوئی نہیں، کے تعلق کی نشاندہی کیجیے۔



5- مثان $\triangle MNO$ اور $\triangle PQR$ میں مطابقت والے حصوں کی نشاندہی کیجیے۔

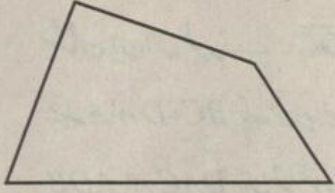
- (i) $\overline{MN} \leftrightarrow$ ☐
- (ii) $\overline{NO} \leftrightarrow$ ☐
- (iii) $\overline{PR} \leftrightarrow$ ☐
- (iv) $\angle I \leftrightarrow$ ☐



7.5 چوکور QUADRILATERALS

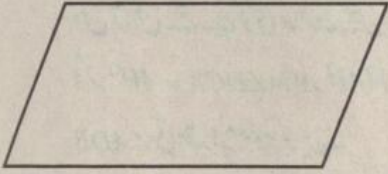
چوکور Quadrilaterals

چار اضلاع والی بند شکل چوکور کہلاتی ہے۔



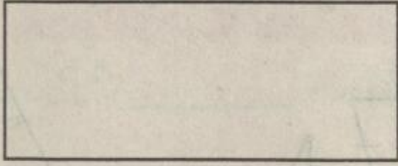
متوازی الاضلاع Parallelogram

متوازی الاضلاع ایسی چوکور جس کے متوازی اضلاع کے دو جوڑے ہوں۔



مستطیل Rectangle

ایسی متوازی الاضلاع جس میں ہر ایک زاویہ قائمہ ہو۔



مربع Square

مربع ایسی مستطیل ہے جس میں تمام اضلاع مساوی ہوں۔



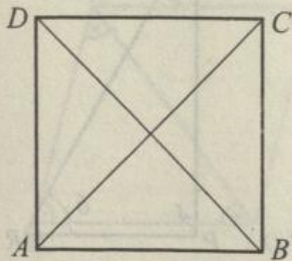
7.5.1 متماثل کے خواص Properties of Congruency

مربع کے چاروں اضلاع مساوی ہوتے ہیں۔

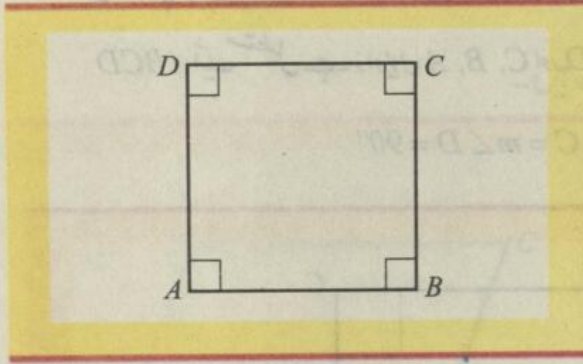
$\overline{AB}$ ، $\overline{BC}$ ، $\overline{CD}$ اور $\overline{DA}$ ایک مربع ہے۔

کی پیمائش کیجیے۔ ہمیں پتا چلتا ہے کہ

$$m\overline{AB} = m\overline{BC} = m\overline{CD} = m\overline{DA} = 2.8 \text{ سینٹی میٹر}$$



مربع کے چاروں زاویے قائمہ ہوتے ہیں

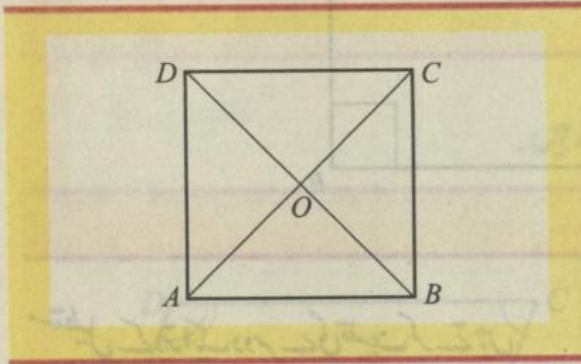


ABCD ایک مربع ہے۔ C, B, A اور D زاویوں کی

پروٹیکٹر کی مدد سے پیمائش کیجیے۔ تو ہمیں پتا چلتا ہے۔

$$m\angle A = m\angle B = m\angle C = m\angle D = 90^\circ$$

مربع کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں



مشکل میں ABCD ایک مربع لیجیے۔ اس کے وتر $\overline{AC}$

اور $\overline{BD}$ نقطہ 'O' پر قطع کرتے ہیں۔ پیمائش سے

پتا چلتا ہے کہ

$$m\overline{OA} = m\overline{OC} = 1.9 \text{ سینٹی میٹر اور}$$

$$m\overline{OB} = m\overline{OD} = 1.9 \text{ سینٹی میٹر}$$

Opposite Sides of a Rectangle are Equal

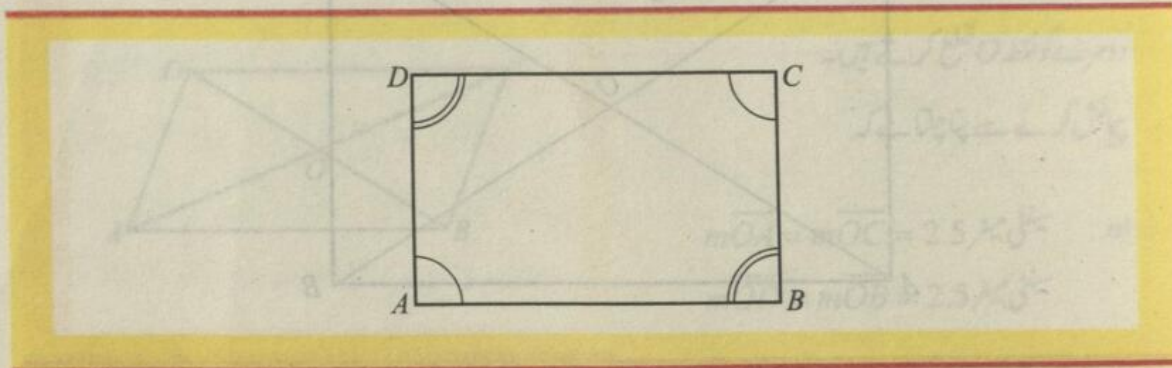
7.5.2 مستطیل کے مخالف اضلاع مساوی ہوتے ہیں

شکل میں ایک مستطیل ABCD دیکھیے۔ $\overline{AB}$ ، $\overline{CD}$ اور $\overline{AD}$ ، $\overline{BC}$ دو مخالف اضلاع کے جوڑے ہیں۔

پیمائش سے ہمیں پتا چلتا ہے کہ

$$m\overline{AB} = m\overline{CD} = 4.5 \text{ سینٹی میٹر}$$

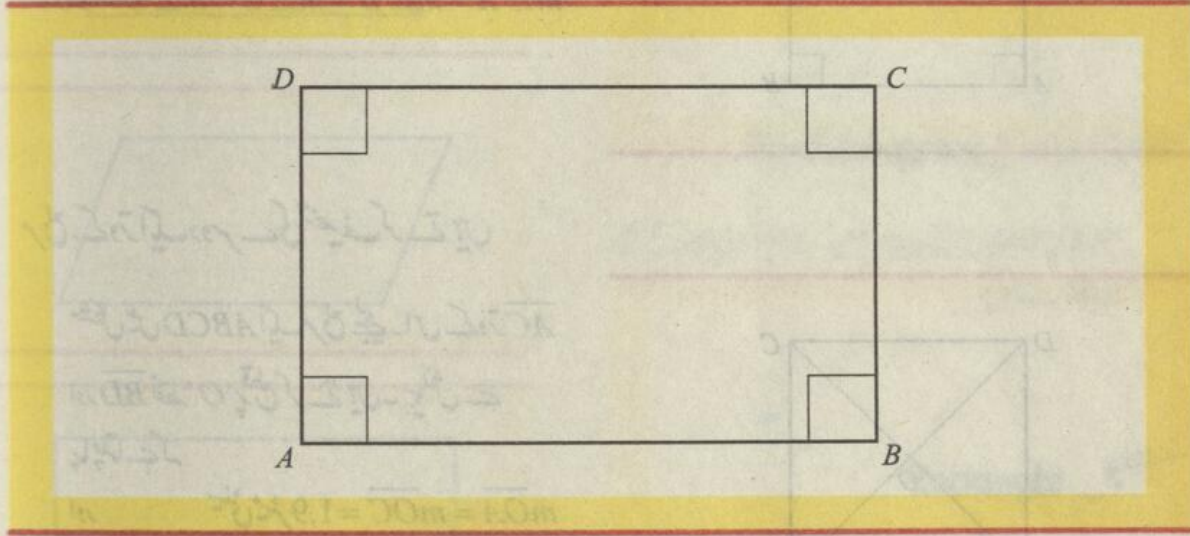
$$m\overline{AD} = m\overline{BC} = 2.8 \text{ سینٹی میٹر}$$



مستطیل کے چاروں زاویے قائمہ ہوتے ہیں

$ABCD$ ایک مستطیل ہے۔ زاویوں A, B, C, D کی پروٹیکٹر کی مدد سے پیمائش کرنے پر پتا چلتا ہے کہ

$$m\angle A = m\angle B = m\angle C = m\angle D = 90^\circ$$

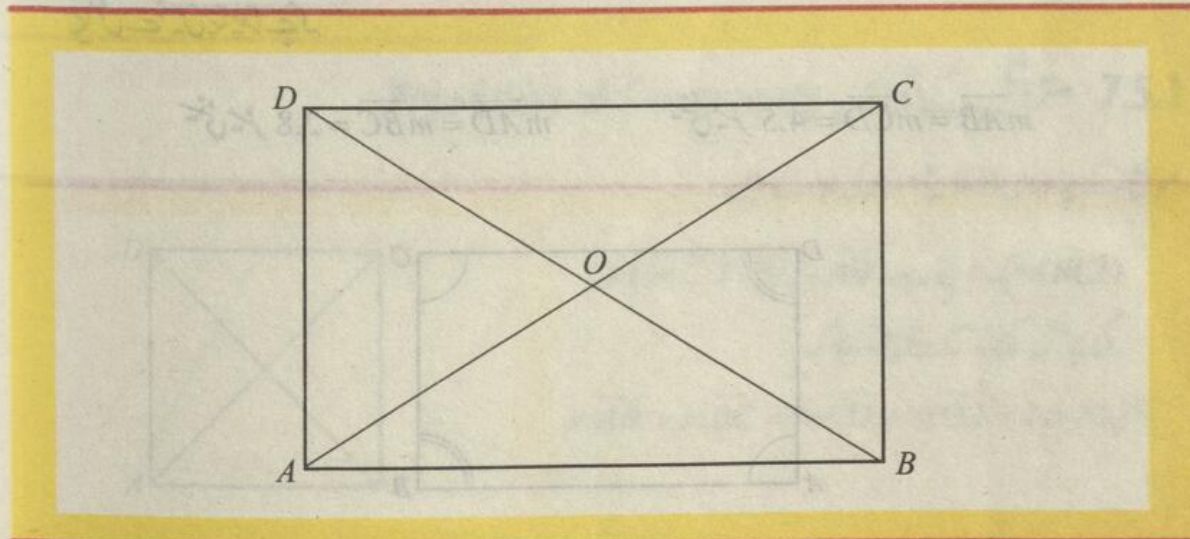


مستطیل کے وتر ایک دوسرے کی تقصیف کرتے ہیں

$ABCD$ ایک مستطیل ہے۔ اس کے وتر AC اور BD نقطہ O پر کاٹتے ہیں۔

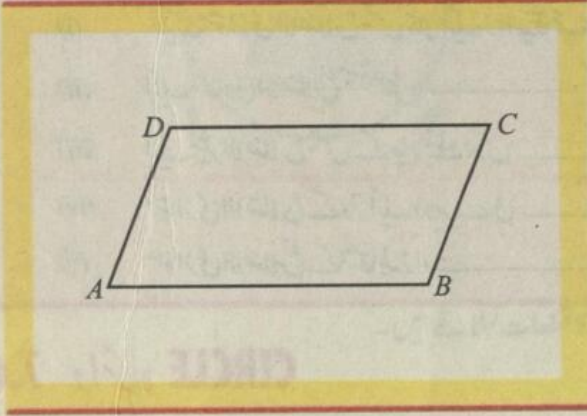
پیمائش سے ہمیں پتہ چلتا ہے کہ $m\overline{OA} = m\overline{OC} = 2.5$ سینٹی میٹر

اور $m\overline{OB} = m\overline{OD} = 2.5$ سینٹی میٹر



7.5.3 متوازی الاضلاع کے خواص Properties of a Parallelogram

◀ متوازی الاضلاع کے مخالف اضلاع مساوی ہوتے ہیں۔



متوازی الاضلاع ABCD میں $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ اور

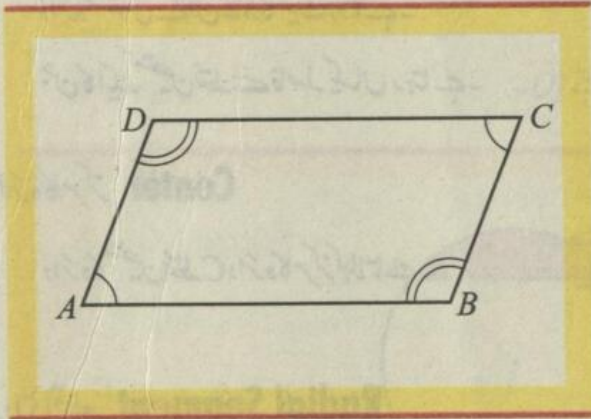
$\overline{AD}$, $\overline{BC}$ مخالف اضلاع کے جوڑے ہیں۔

پیمائش کرنے سے پتا چلتا ہے کہ

$$m\overline{AB} = m\overline{CD} = 3.9 \text{ سینٹی میٹر}$$

$$m\overline{AD} = m\overline{BC} = 2.0 \text{ سینٹی میٹر}$$

◀ متوازی الاضلاع کے متقابلہ زاویے مساوی ہوتے ہیں۔



ABCD متوازی الاضلاع ہے اور مخالف زاویوں

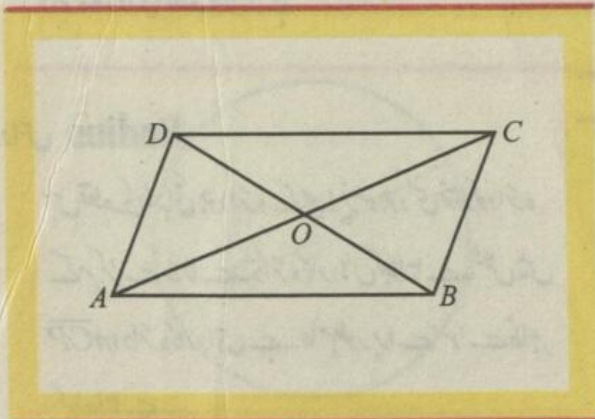
$\angle A$, $\angle C$ اور $\angle B$, $\angle D$ کے جوڑے ہیں۔

پیمائش کرنے سے ہمیں پتا چلتا ہے کہ

$$m\angle A = m\angle C = 70^\circ$$

$$m\angle B = m\angle D = 110^\circ$$

◀ متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔



ABCD متوازی الاضلاع کے وتر $\overline{AC}$ اور $\overline{BD}$ ایک

دوسرے کو نقطہ O قطع کرتے ہیں۔

پیمائش کرنے سے پتا چلتا ہے کہ

$$m\overline{OA} = m\overline{OC} = 2.5 \text{ سینٹی میٹر}$$

$$m\overline{OD} = m\overline{OB} = 2.5 \text{ سینٹی میٹر}$$

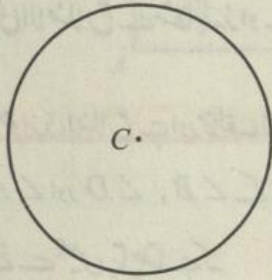
مشق 7.5

1- خالی جگہ پر کیجیے۔

- (i) ایک متوازی الاضلاع جس میں ایک زاویہ قائمہ ہو _____ کہلاتی ہے۔
- (ii) ایک مساوی الاضلاع مستطیل _____ کہلاتی ہے۔
- (iii) ایک کثیر الاضلاع جس کے چار ضلع ہوں _____ کہلاتی ہے۔
- (iv) متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کی _____ کرتے ہیں۔
- (v) متوازی الاضلاع کے متقابلہ زاویے _____ ہوتے ہیں۔

7.6 دائرہ CIRCLE

7.6.1 دائرہ Circle

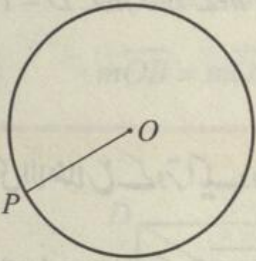


دائرہ مستوی کے ان نقاط کا سیٹ ہوتا ہے۔

جن کا ایک متعین نقطہ سے فاصلہ یکساں رہتا ہے۔

دائرہ کا مرکز Center

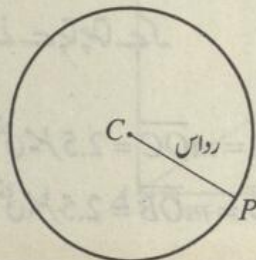
دائرہ کا متعین نقطہ C دائرہ کا مرکز کہلاتا ہے۔



رداسی قطعہ Radial Segment

دائرہ کے محیط پر P ایک نقطہ ہے۔ دائرہ کا مرکز O ہے تو $\overline{OP}$

دائرہ کا رداسی قطعہ کہلاتا ہے۔



رداس Radius

اس قطعہ کی لمبائی جو دائرہ کے محیط پر موجود کسی نقطہ کو دائرہ

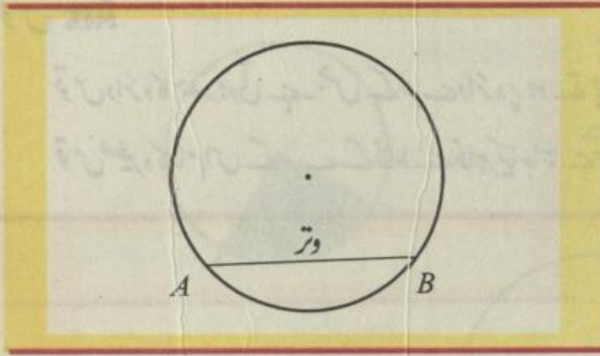
کے مرکز سے ملاتا ہے۔ دائرہ کا رداس کہلاتا ہے۔ شکل میں

$m\overline{CP}$ دائرہ کا رداس ہے۔ عام طور پر اسے 'r' سے ظاہر

کیا جاتا ہے۔

وتر Chord

کوئی بھی قطعہ جو دائرہ کے دو نقاط کو ملائے دائرہ کا وتر کہلاتا ہے۔ شکل میں $\overline{AB}$ ایک وتر ہے۔



دائرہ کا قطعہ Segment of a Circle

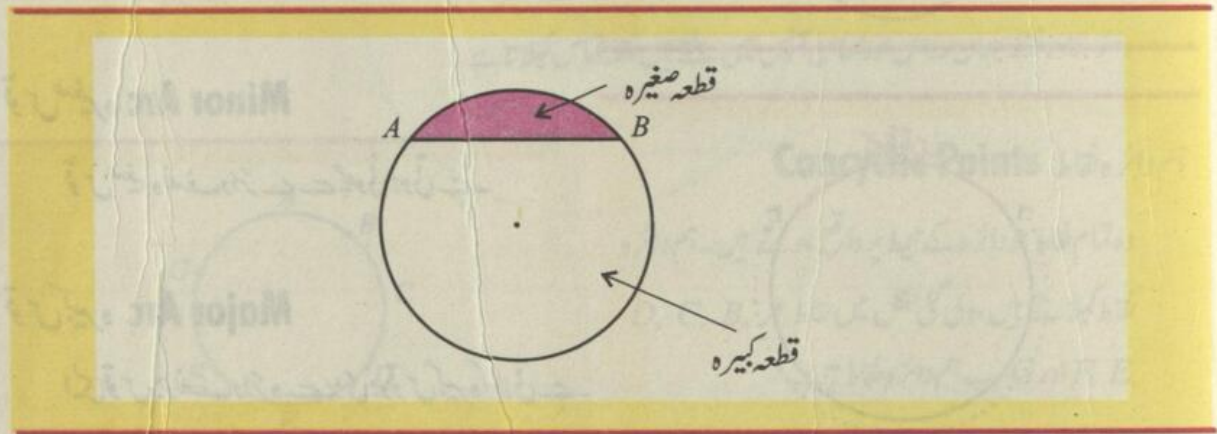
دائرہ کا وتر دائرے کو دو حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔ یہ حصے دائرے کا قطعہ کہلاتے ہیں۔

Minor Segment قطعہ صغیرہ

قوس صغیرہ اور وتر کے درمیانی حصہ کو دائرہ کا قطعہ صغیرہ کہتے ہیں۔

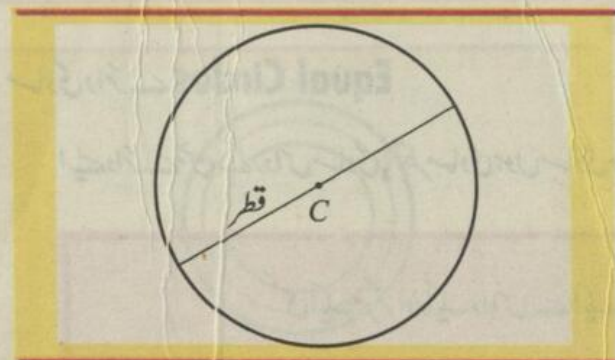
Major Segment قطعہ کبیرہ

قوس کبیرہ اور وتر کے درمیانی حصہ کو دائرہ کا قطعہ کبیرہ کہتے ہیں۔



قطر Diameter

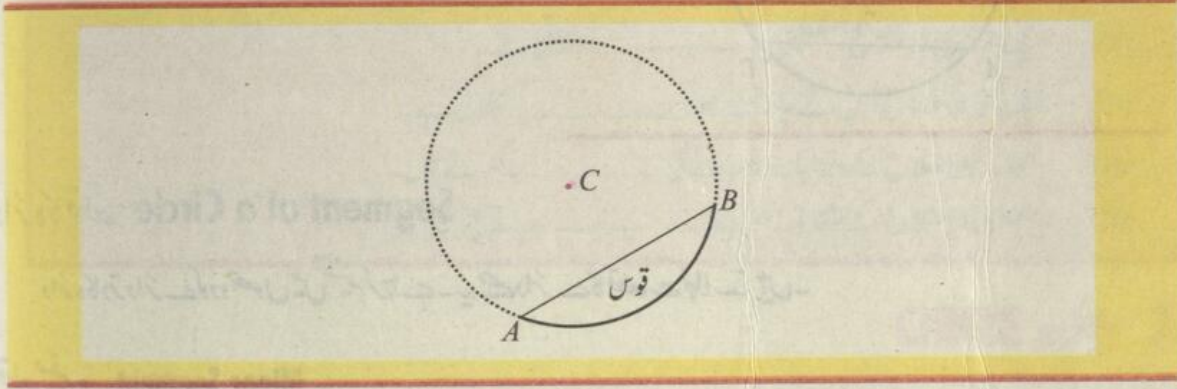
ایسا وتر جو دائرہ کے مرکز میں سے گزرے دائرہ کا قطر کہلاتا ہے۔ کسی دائرے کے قطر کی لمبائی اس کے رداس کا دو گنا ہوتی ہے۔



$$\text{قطر} = 2 \times \text{رداس}$$

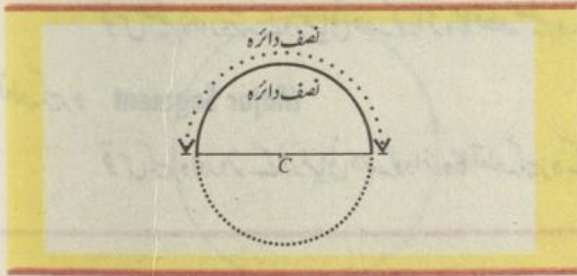
قوس Arc

قوس دائرہ کا حصہ ہوتی ہے۔ جس کے سرے دائرہ پر ہوتے ہیں اور درمیانی حصہ دائرہ کے نقاط کا سیٹ ہوتی ہے۔
قوس صغیرہ کا نام اس کے سرے کے نقاط سے ظاہر کیا جاتا ہے جیسا کہ قوس AB کو $(\widehat{AB})$ شکل میں لکھا گیا ہے۔



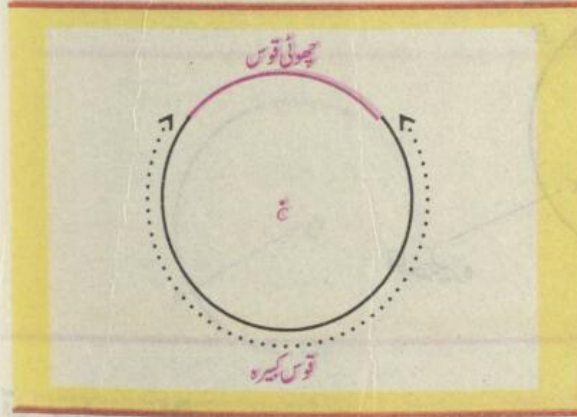
نصف دائرہ Semi Circle

ایک نصف دائرہ جو ایک دائرہ کا آدھا ہوتا ہے نصف دائرہ کہلاتا ہے۔



قوس صغیرہ Minor Arc

قوس صغیرہ نصف دائرے سے چھوٹی ہوتی ہے۔



قوس کبیرہ Major Arc

ایسی قوس جو نصف دائرہ سے بڑی ہو قوس کبیرہ کہلاتی ہے۔

مساوی دائرے Equal Circles

ایسے دائرے جن کے رداس مساوی یا قطر مساوی ہوں مساوی دائرے کہلاتے ہیں۔

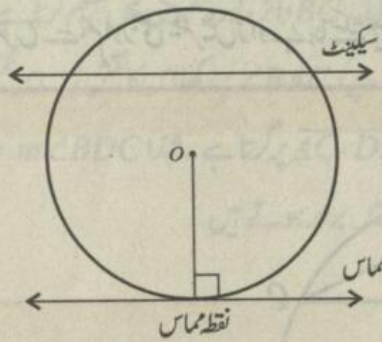
کسی ایک مرکز اور ایک رداس سے ایک اور صرف ایک دائرہ بنایا جاسکتا ہے۔

7.6.2 سیکٹر Sector



دائرہ کے کوئی دو رداسی قطعات اور ان کے متعلقہ قوس سے گھرا ہوا دائرہ کا علاقہ، دائرہ کا سیکٹر کہلاتا ہے۔ شکل میں علاقہ AOB ، مرکز کے ساتھ دائرہ کا سیکٹر کہلاتا ہے۔

خط قاطع Secant Line



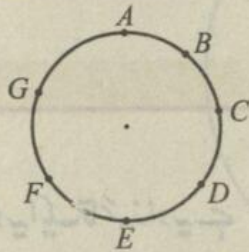
ایسا خط مستقیم جو دائرہ کو اس کے دو نقاط پر قطع کرے دائرہ کا خط قاطع کہلاتا ہے۔

مماس Tangent

مماس ایسا خط ہوتا ہے جو دائرے کے رداس کے بیرونی نقطہ پر عمود ہوتا ہے۔

دائرہ کا وہ نقطہ جہاں رداس اور مماس آپس میں ملتے ہیں نقطہ تماس کہلاتا ہے۔

ہم دائرہ نقاط Concyclic Points



وہ تمام نقاط جو دائرہ کے محیط پر واقع ہوتے ہیں۔ ہم دائرہ نقاط کہلاتے ہیں، دی گئی شکل میں نقاط A, B, C, D, E, F, G سب ہم دائرہ نقاط ہیں۔

ہم مرکز دائرے Concentric Circles



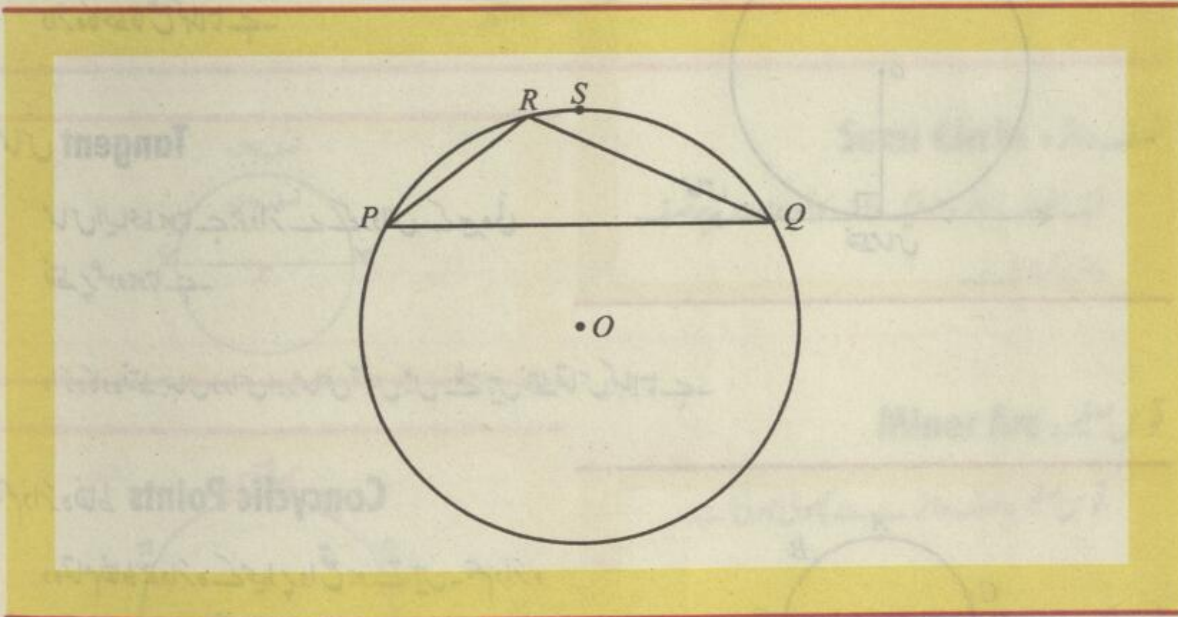
ایسے ہم مستوی دائرے جو ہم مرکز ہوں اور جن کے رداس مختلف ہوں۔ ہم مرکز دائرے کہلاتے ہیں، تین ہم مرکز دائروں کا سیٹ شکل میں دکھایا گیا ہے۔

7.6.3 زاویوں کی خصوصیات Properties of Angles

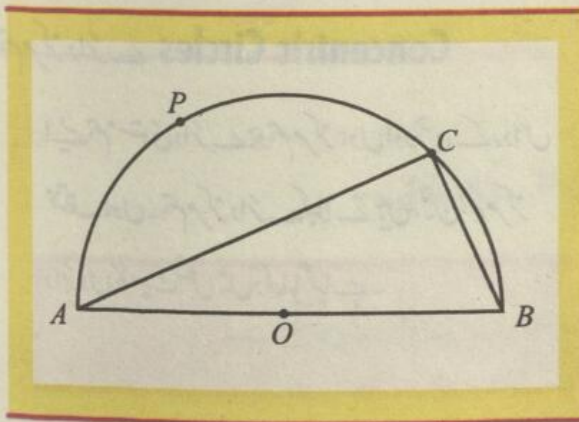
دائروں میں زاویوں کے خواص کا مطالعہ کرنے کے لیے سب سے پہلے دائرے کے قطع میں زاویہ کو سمجھنا ضروری ہے۔

دائرے کے قطعہ میں زاویہ:

'O' مرکز والے دائرہ کا قاطع PQ ہے جو کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔ O مرکز والے دائرہ کا قطعہ PSQ لیتے ہیں اس پر R کوئی نقطہ لے کر P اور Q سے R کو ملاتے ہیں اور $\angle PRQ$ بنتا ہے۔ اس طرح $\angle PRQ$ ، قطعہ PSQ کا زاویہ کہلاتا ہے۔ اس طرح سے ہم اور بھی سیکٹر میں زاویے بنا سکتے ہیں۔



نصف دائرہ کا زاویہ ایک قائمہ زاویہ ہے Angle in a Semi-Circle is a Right Angle



- 1- کوئی قطعہ خط AB لیکر اس کا وسطی نقطہ O لیا۔
- 2- $\overline{AB}$ پر $\overline{OA}$ رداس کا نصف دائرہ لگایا۔
- 3- نصف دائرہ پر کوئی نقطہ C لیا۔ C کو A اور B سے ملایا۔ پس $\angle ACB$ نصف دائرہ کا زاویہ ہے۔

4- پروڈیکٹر کے مرکز کو C پر رکھا اور $\overline{AC}$ پر اس کی لائن کو رکھا۔

ہمیں پتا چلتا ہے $\angle ACB$ کی مقدار 90° ہے۔ یعنی زاویہ قائمہ

پس نصف دائرہ میں زاویہ کی مقدار 90° ہوتی ہے۔ یعنی نصف دائرہ میں زاویہ قائمہ بنتا ہے۔ $m\angle ACB = 90^\circ$

ایک ہی قطعہ میں بننے والے زاویے مساوی ہوتے ہیں

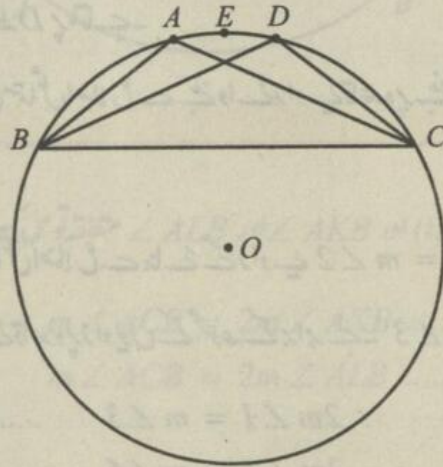
Angles in the Same Segment are Equal

'O' کو مرکز مان کر دائرہ لگایا۔ دائرہ پر B اور C نقاط لیے اور C، B اور C کو ملایا۔ $\overline{BC}$ دائرہ کو دو حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔ اسی ایک

ہی دائرہ کے قطعہ میں زاویے $\angle BAC$ اور $\angle BDC$ بنائے۔ ٹریننگ پیپر کو $\angle BAC$ پر رکھا اس کا نقش لیا۔ اس نقش کو

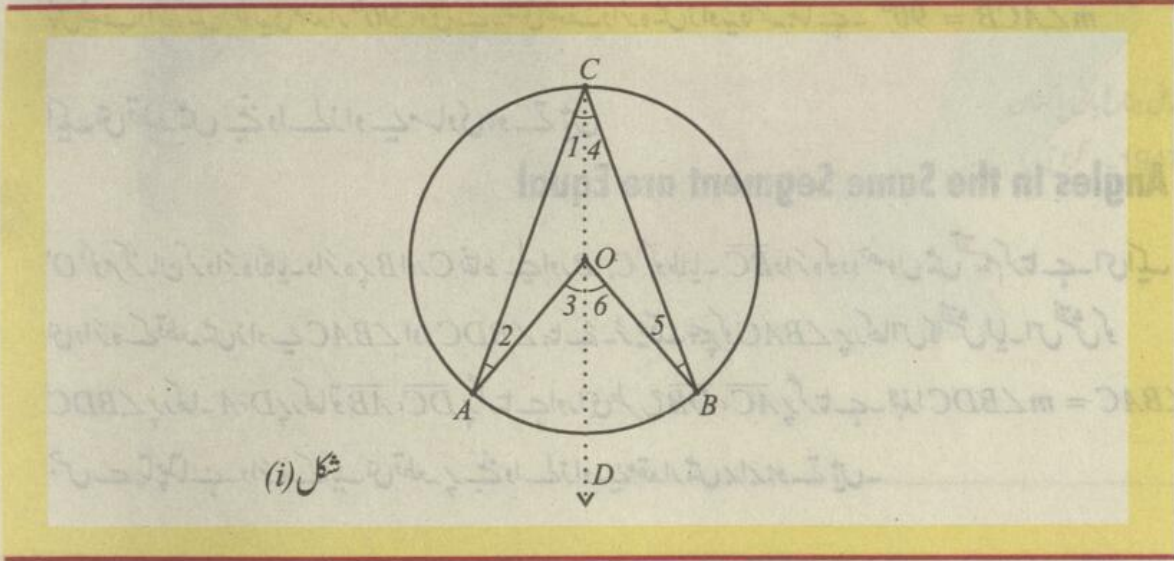
$\angle BDC$ پر رکھا۔ A، D پر رکھا تو $\overline{AB}$ ، $\overline{DC}$ پر گرتا ہے اور اسی طرح $\overline{AC}$ ، $\overline{DB}$ پر گرتا ہے۔ لہذا $m\angle BAC = m\angle BDC$

جس سے پتا چلتا ہے۔ دائرہ کے ایک ہی قطعہ پر بننے والے زاویے مقدار میں برابر ہوتے ہیں۔



مرکزی زاویہ Central Angle

قوس صغیرہ کا مرکزی زاویہ متعلقہ قوس کبیرہ کے محصور زاویہ کا دو گنا ہوتا ہے۔



شکل (i) میں $\angle AOB$ قوس صغیرہ $\widehat{AB}$ کا مرکزی زاویہ ہے جبکہ $\angle ACB$ قوس کبیرہ $\widehat{ACB}$ کا محصور زاویہ ہے۔
C کو O سے ملا کر بڑھایا جو دائرہ کو نقطہ D پر ملتا ہے۔

قاعدہ AC پر مثلث $\angle ABC$ کی متماثل اضلاع سے بننے والے زاویے قاعدہ پر بننے والے زاویوں کا مجموعہ مخالف بیرونی زاویہ کے برابر ہوتا ہے۔

قاعدہ AC پر مثلث AOC کے متماثل اضلاع سے بنائے گئے زاویے $m \angle 1 = m \angle 2$

مثلث کا مخالف بیرونی زاویہ اس کے قاعدہ پر زاویوں کے مجموعہ کے برابر ہے۔ $m \angle 1 + m \angle 2 = m \angle 3$

$$\therefore 2m \angle 1 = m \angle 3 \quad \dots\dots\dots (i)$$

$$2m \angle 4 = m \angle 6 \quad \dots\dots\dots (ii) \quad \text{اسی طرح}$$

$\therefore$ (i) اور (ii) کو جمع کرنے سے

$$2m \angle 1 + 2m \angle 4 = m \angle 3 + m \angle 6$$

$$2(m \angle 1 + m \angle 4) = m \angle 3 + m \angle 6$$

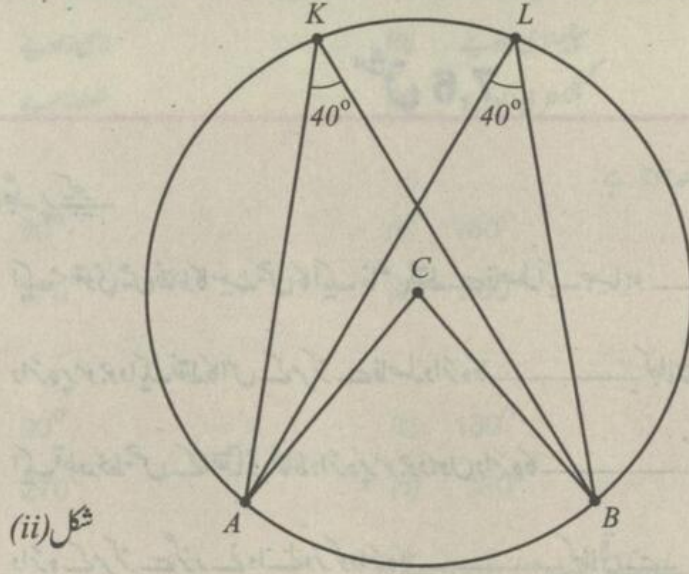
$$2m \angle ABC = m \angle AOB$$

$$\text{یا } m \angle AOB = 2m \angle ACB$$

7.6.4 اطلاق Applications

ایک ہی قوس میں بننے والے تمام زاویے مقدار میں برابر ہوتے ہیں۔

$$m\angle K = m\angle L = 40^\circ$$



$\angle ACB$ مرکزی زاویہ ہے شکل (ii) اور $\angle AKB$ اور $\angle ALB$ متعلقہ قوس کبیرہ کے محصور زاویے ہیں۔

$$\therefore m\angle ACB = 2m\angle AKB \dots\dots\dots(i)$$

$$m\angle ACB = 2m\angle ALB \dots\dots\dots(ii) \text{ اور}$$

$\therefore$ (i) اور (ii) کی رو سے

$$2m\angle AKB = 2m\angle ALB$$

$$m\angle AKB = m\angle ALB$$

پس ایک ہی قوس پر بننے والے زاویے برابر ہوتے ہیں۔

یاد رکھیے:

اگر متماثل دائروں یا ایک ہی دائرہ میں اگر دو چھوٹی قوسیں متماثل ہوں تب ان کی بڑی قوسوں سے بننے والے متناظرہ زاویے بھی متماثل ہوتے ہیں۔

مشق 7.6

1- خالی جگہ پر کیجیے۔

- (i) ایک مستوی میں نقاط کا سیٹ جن کا ایک خاص نقطہ سے فاصلہ ایک جیسا ہو _____ کہلاتا ہے۔
- (ii) دائرہ پر موجود ایک نقطہ کا اس کے مرکز سے فاصلہ دائرہ کا _____ کہلاتا ہے۔
- (iii) ایک قطعہ خط جس کے اختتامی نقاط دائرہ پر موجود ہوں دائرہ کا _____ کہلاتا ہے۔
- (iv) دائرہ کے مرکز سے گزرنے والے وتر کو دائرہ کا _____ کہلاتی ہے۔
- (v) دائرہ کا نصف _____ کہلاتا ہے۔
- (vi) نصف دائرہ سے بڑی قوس کو _____ کہتے ہیں۔
- (vii) ایک دیے گئے مرکز اور ایک دیے گئے _____ سے ایک اور صرف ایک دائرہ بنا سکتے ہیں۔
- (viii) قوس اور دو درجہ کے قطعات سے گھرا ہوا علاقہ _____ کہلاتا ہے۔
- (ix) ایک سیدھا خط جو دائرہ کو دو نقاط پر قطع کرے _____ کہلاتا ہے۔
- (x) نصف دائرہ میں زاویہ _____ ہوتا ہے۔

جائزہ مشق 7

I- درست جواب کے گرد دائرہ لگائیے۔

1. ایسا زاویہ جس کی مقدار 180° سے زائد مگر 360° سے کم ہو کہلاتا ہے:

- | | |
|------------------|-----------------|
| (a) عکس زاویہ | (b) منفرد زاویہ |
| (c) زاویہ مستقیم | (d) حادہ زاویہ |

2. ایسے دو زاویے جن میں مشترک راس اور ایک بازو مشترک ہو کہلاتے ہیں:

- | | |
|-----------------|--------------------|
| (a) راسی زاویے | (b) پلیمٹری زاویے |
| (c) متصلہ زاویے | (d) کپلیمٹری زاویے |

3. مثلث کے زاویوں کا مجموعہ ہوتا ہے:

- | | |
|-----------------|-----------------|
| (a) 90° | (b) 180° |
| (c) 270° | (d) 360° |

4. زاویہ مستقیم کا درجہ ہوتا ہے:

- | | |
|-----------------|-----------------|
| (a) 90° | (b) 180° |
| (c) 270° | (d) 360° |

5. اگر دو زاویے ایک ہی زاویے کے پلیمٹ ہوں تو وہ ہوتے ہیں

- | | |
|-----------------|-------------------|
| (a) مساوی | (b) غیر مساوی |
| (c) متصلہ زاویے | (d) متبادلہ زاویے |

6. ایسی مثلث جس کا کوئی ضلع بھی برابر نہ ہو، کہلاتی ہے:

- | | |
|-------------------------|------------------------|
| (a) متساوی الساقین مثلث | (b) مساوی الاضلاع مثلث |
| (c) مختلف الاضلاع مثلث | (d) قائمہ الزاویہ مثلث |

7. ایسی مثلث جس کے تینوں زاویے حادہ ہوں، کہلاتی ہے:

- | | |
|-----------------------|------------------------|
| (a) حادہ الزاویہ مثلث | (b) قائمہ الزاویہ مثلث |
| (c) زاویہ مستقیم | (d) حادہ زاویہ |

8. ایسی کثیر الاضلاع جس کے چاروں اضلاع مساوی ہوں کہلاتی ہے:

- | | |
|------------------|--------------------|
| (a) کثیر الاضلاع | (b) متوازی الاضلاع |
| (c) مربع | (d) مستطیل |

9. نصف دائرہ سے بڑی قوس کہلاتی ہے:

- (a) قوس صغیرہ (b) وتر
(c) قوس کبیرہ (d) قطر

10. مساوی رداس یا قطر والے دائرے کہلاتے ہیں:

- (a) ہم مرکز دائرے (b) نصف دائرے
(c) متماثل دائرے (d) ہم دائرے نقاط

II - خالی جگہوں کو پُر کیجیے۔

1. دو زاویے جن کا مشترک راس اور ایک بازو مشترک ہو _____ کہلاتے ہیں۔

2. اگر دو زاویوں کا مجموعہ، زاویہ مستقیم ہو تو زاویے کہلاتے ہیں _____

3. زاویہ جن کی مقدار 90° سے زائد اور 180° سے کم ہو، کہلاتا ہے _____

4. دو غیر متصل زاویے جن میں ہر ایک کی مقدار زاویہ مستقیم سے کم ہو _____ کہلاتے ہیں۔

5. مثلث کے زاویوں کا مجموعہ _____ ہوتا ہے۔

6. دو لائنیں جو تیسری لائن کے متوازی ہوں تو وہ _____ متوازی ہوتی ہیں۔

7. دو ہندسی اشکال جو جسامت میں مساوی اور شکل میں یکساں ہوں _____ ہوتی ہیں۔

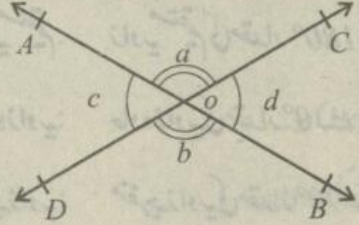
8. ایک مثلث جس کا کوئی ضلع بھی آپس میں برابر نہ ہو _____ ہوتی ہیں۔

9. وتر جو دائرہ کے مرکز میں سے گزرتا ہو _____ کہلاتا ہے۔

10. نصف دائرہ میں بننے والا زاویہ _____ ہوتا ہے۔

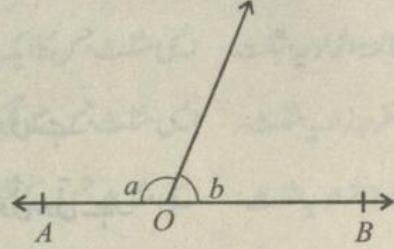
راسی زاویے

معلوم ہے کہ $m\angle a = m\angle b$ اور $m\angle c = m\angle d$ ہے
تو $\overline{AOB}$ اور $\overline{DOC}$ خطوط مستقیم ہیں۔



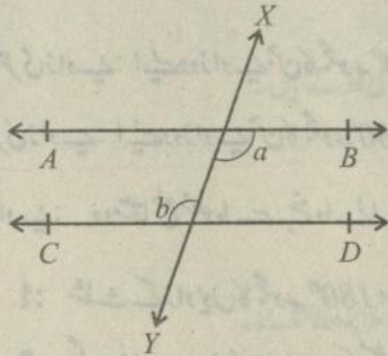
خط مستقیم پر متصل زاویے

دیا گیا ہے کہ $m\angle a + m\angle b = 180^\circ$
تو $\overline{AOB}$ ایک خط مستقیم ہے۔

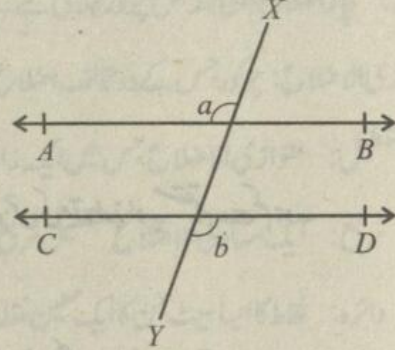


متوازی خطوط کے ساتھ بننے والے زاویے

دیا گیا ہے $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ تو $m\angle a = m\angle b$

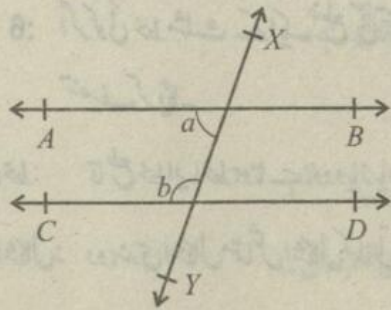


دیا گیا ہے $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ تو $m\angle a = m\angle b$



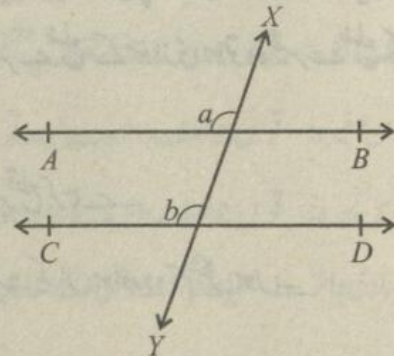
اندرونی زاویے

دیا گیا ہے $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ تو $m\angle a + m\angle b = 180^\circ$



مبادلہ زاویے

دیا گیا ہے $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ تو $m\angle a = m\angle b$



SUMMARY خلاصہ

- زاویہ: زاویہ دو ایسی شعاعوں کا اتصال (یونین) ہوتا ہے جس کا نقطہ آغاز مشترک ہو۔
- قائمہ زاویہ: قائمہ زاویہ ایسا زاویہ ہوتا ہے جس کی مقدار 90° ہو۔
- زاویہ مستقیم: زاویہ مستقیم کی مقدار 180° ہوتی ہے۔
- حادہ زاویہ: حادہ زاویہ کی مقدار 0° سے بڑی اور 90° سے چھوٹی ہوتی ہے۔
- منفرجہ زاویہ: منفرجہ زاویہ کی مقدار 90° سے بڑی اور 180° سے چھوٹی ہوتی ہے۔
- عکسی زاویہ: عکسی زاویہ کی مقدار 180° سے بڑی اور 360° سے کم ہوتی ہے۔
- مساوی زاویے: مساوی زاویوں کی مقداریں مساوی ہوتی ہیں۔
- متصلہ زاویے: دو ایسے زاویے جن کا راست مشترک اور ایک بازو مشترک ہو، متصلہ زاویے کہلاتے ہیں۔
- کمپلیمنٹری زاویے: ایسے دو زاویے جن کا مجموعہ 90° ہو۔
- سپلیمنٹری زاویے: ایسے دو زاویے جن کا مجموعہ 180° ہو۔
- راسی زاویے: دو متقاطع خطوط سے بننے والے ایسے غیر متصلہ زاویے جن کی مقدار زاویہ مستقیم سے کم ہو۔
- نتائج: 1: مثلث کے زاویوں کا مجموعہ 180° ہوتا ہے۔
- 2: اگر دو زاویے مساوی زاویوں کے کمپلیمنٹ ہوں تو وہ آپس میں بھی مساوی ہوتے ہیں۔
- 3: اگر دو زاویے، دو مساوی زاویوں کے سپلیمنٹ ہوں تو وہ آپس میں بھی مساوی ہوتے ہیں۔
- 4: دو خطوط تیسرے خط کے متوازی ہوں تو وہ آپس میں بھی متوازی ہوتے ہیں۔
- 5: اگر تین متوازی خطوط کسی خط قاطع پر مساوی قطعات قطع کریں تو ہر خط قاطع پر مساوی قطعات کاٹتے ہیں۔
- 6: اگر کوئی خط مثلث کے ایک ضلع کی تنصیف کرے اور دوسرے ضلع کے متوازی ہو تو وہ تیسرے ضلع کی بھی تنصیف کریگا۔
- قاطع خط: قاطع خط ایسا خط ہوتا ہے جو دو یا زیادہ خطوط کو مختلف نقاط پر قطع کرتا ہے۔
- متماثل اشکال: دو ہندسی اشکال متماثل اشکال کہلاتی ہیں اگر ان کی جسامت یکساں ہو اور وہ ہم شکل ہوں۔

کثیر الاضلاع: مستوی پر ایک ایسی بند شکل جو تین یا زیادہ اضلاع پر مشتمل ہو۔

متساوی الساقین مثلث: ایسی مثلث جس کے دو اضلاع مساوی ہوتے ہیں۔

مختلف اضلاع مثلث: ایسی مثلث جس کے دو اضلاع مساوی نہ ہو۔

قائمہ الزاویہ مثلث: ایسی مثلث جس کا ایک زاویہ قائمہ ہو۔

منفرجہ زاویہ مثلث: ایسی مثلث جس میں ایک زاویہ منفرجہ (90° سے بڑا) ہو۔

حادیہ الزاویہ مثلث: ایسی مثلث جس کے تینوں زاویے حادہ (90° سے کم) ہوں۔

مساوی الاضلاع مثلث: ایسی مثلث جس کے تینوں اضلاع لمبائی میں مساوی ہوں۔

دو مثلثان کے متماثل ہونے کی صورتیں

آراچہ ایس $\cong$ آراچہ ایس (iv) $\angle$ $\cong$ $\angle$ (iii) $\angle$ $\cong$ $\angle$ (ii) $\angle$ $\cong$ $\angle$ (i)

چوکور: چار اضلاع والی بند شکل چوکور کہلاتی ہے۔

متوازی الاضلاع: چوکور جس کے دو مخالف اضلاع کے جوڑے متوازی ہوتے ہیں۔

مستطیل: متوازی الاضلاع جس میں ایک زاویہ قائمہ ہو۔

مربع: ایک مساوی الاضلاع مستطیل مربع کہلاتی ہے۔

دائرہ: نقاط کا ایسا سیٹ جن کا ایک معین نقطہ سے فاصلہ برابر ہو، دائرہ بناتا ہے۔

رداس: اس قطعہ کی لمبائی جو دائرے کے مرکز کو اس کے کسی نقطہ سے ملائے۔

قطر: اس وتر کی لمبائی جو دائرے کے مرکز میں سے گزرے، قطر کہلاتی ہے۔

قوس: دائرے کا وہ حصہ جس کے سرے اور درمیانی نقاط دائرے پر واقع ہوں، دائرہ کی قوس کہلاتا ہے۔

نصف دائرہ: قوس جو دائرے کے نصف پر مشتمل ہو، نصف دائرہ کہلاتی ہے۔

قوس صغیرہ: قوس جو نصف دائرہ سے کم ہو، قوس صغیرہ کہلاتی ہے۔

قوس کبیرہ: قوس جو نصف دائرہ سے بڑی ہو، قوس کبیرہ کہلاتی ہے۔

مساوی دائرے: ایسے دائرے جن کے مساوی رداس ہوں یا مساوی قطر ہوں۔

قاطع خط: ایسا خط جو دائرہ کو دو مختلف نقاط پر قطع کرے۔

مماس: ایسا خط، جو دائرے کے رداس کو اس کے بیرونی سرے پر عمود ہو۔

سیکٹر: دائرہ کا وہ علاقہ جو دائرہ کی قوس اور اس کے سروں کو ملانے والے رداسی قطعات کے اندر گھرا ہوا ہو۔

ہم مرکز دائرے: ایسے ہم مستوی دائرے جن کا مرکز مشترک نقطہ ہو لیکن ان کے رداس مختلف ہوں۔

مرکزی زاویہ: کسی قوس صغیرہ کا مرکز پر بننے والا زاویہ، مرکزی زاویہ کہلاتا ہے۔

ہم دائرہ نقاط: دائرہ کے محیط پر واقع نقاط کو ہم دائرہ نقاط کہتے ہیں۔

نتیجہ: (1) نصف دائرہ کا محصور زاویہ قائمہ ہوتا ہے۔

(2) دائرے کے ایک ہی قطعہ میں بننے والے زاویے مساوی ہوتے ہیں۔

(3) ایک ہی قوس میں محصور زاویے مساوی ہوتے ہیں۔

عملی جیومیٹری PRACTICAL GEOMETRY

- ◀ مثلث بنانا
- ◀ چوکور بنانا
- ◀ دائرہ کا مماس

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

- ◀ ایسی مثلث بنائیں جس کی معلوم ہوں
- دو اضلاع اور درمیانی زاویہ
- دو زاویے اور ایک ضلع
- اس کے دو اضلاع اور کسی ایک ضلع کے مخالف زاویہ (تینوں ممکنات)
- ◀ بنا سکیں۔
- مثلث کے زاویوں کے ناصف
- مثلث کے ارتفاع
- مثلث کے وسطیے اور ان کا ایک نقطہ پر ملنا
- ◀ مستطیل بنا سکیں جبکہ
- دو اضلاع معلوم ہوں
- وتر اور کوئی ایک ضلع معلوم ہو
- ◀ مربع بنا سکیں جبکہ اس کا وتر معلوم ہو
- ◀ متوازی الاضلاع بنا سکیں جبکہ اس کے متضلع اضلاع اور درمیانی زاویہ معلوم ہو۔
- ◀ دیے گئے دائرے کے مرکز کا تعین کر سکیں
- ◀ تین غیر ہم خط نقاط میں سے دائرہ کھینچ سکیں۔
- ◀ کسی نقطہ P سے دائرہ کا مماس کھینچ سکیں۔
- جب P دائرہ پر واقع ہو۔
- جب P دائرہ سے باہر واقع ہو۔
- ◀ بنا سکیں
- مشترک راست مماس یا مشترکہ بیرونی مماس
- دو مساوی دائروں کے مشترک معکوس یا اندرونی مماس
- ◀ مماس کھینچ سکیں
- دو غیر مساوی مس کرتے ہوئے دائروں پر
- دو غیر مساوی متقاطع دائروں پر

8.1 مثلث بنانا CONSTRUCTION OF A TRIANGLE

جب ہمیں کوئی شکل بنانا مقصود ہو تو ہم آلات جیومیٹری استعمال کرتے ہیں جن کے نام پیانہ، پرکار وغیرہ ہیں۔

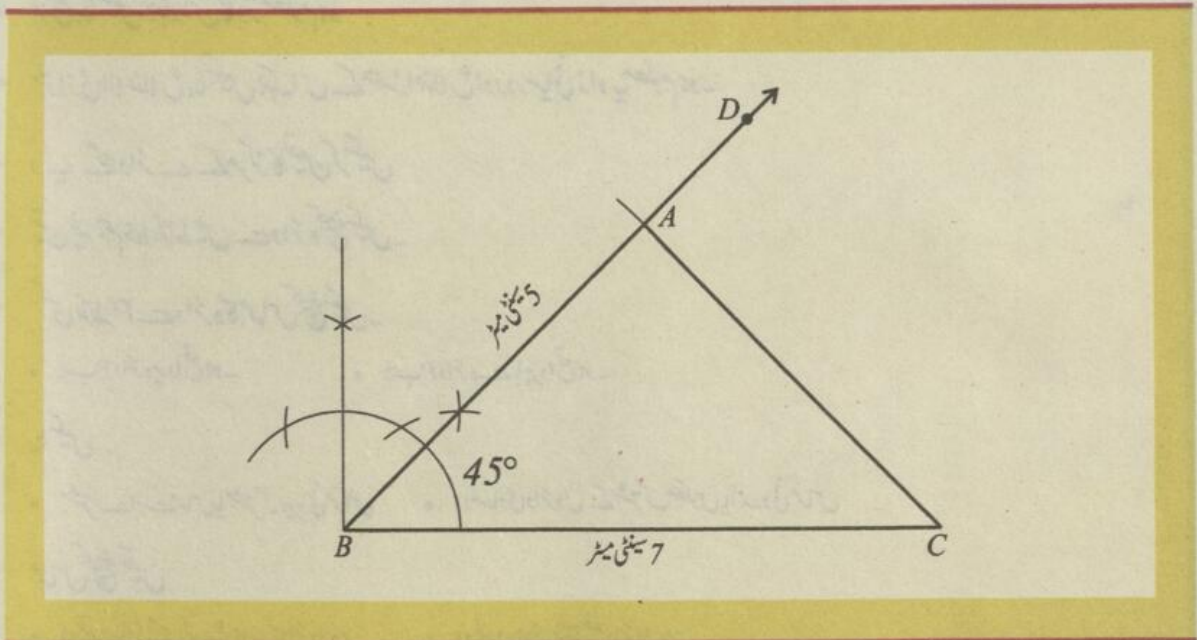
8.1.1 بناوٹ Construction

◀ مثلث بنانا جبکہ اس کے دو اضلاع اور درمیانی زاویہ معلوم ہوں۔

فرض کیا مطلوبہ مثلث کے اضلاع 7 سینٹی میٹر اور 5 سینٹی میٹر اور ان کا درمیانی زاویہ 45° ہے۔

مدارج عمل:

- کوئی ساقطہ خط 7 سینٹی میٹر $m\overline{BC}$ کھینچا۔
- نقطہ B پر زاویہ $m\angle DBC = 45^\circ$ کھینچا۔
- B کو مرکز مان کر $\overline{BD}$ کو نقطہ A پر کاٹتی ہوئی قوس لگائی۔
- A کو C سے ملایا۔
- $\triangle ABC$ مطلوبہ مثلث ہے۔



فرض کیا کہ دو زاویے $m\angle A = 60^\circ$ اور $m\angle B = 30^\circ$ ہیں۔ اور درمیانی ضلع 6 سینٹی میٹر $m\overline{AB}$ ہے۔

- ◀ مثلث بنانا جبکہ اس کے دو اضلاع اور کسی ایک ضلع کے سامنے والا زاویہ معلوم ہو۔

فرض کیا کہ $m\overline{BC} = 6.5\text{cm}$, $m\overline{AC} = 7\text{cm}$, $m\angle A = 60^\circ$ ۔

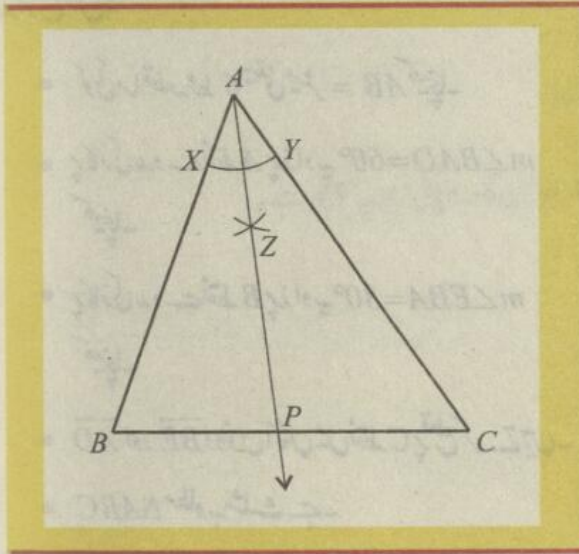
- 223

8.1.2 مثلث کے زاویوں کے ناصف Angle Bisectors of a Triangle

کسی مثلث کے زاویہ کا ناصف اس زاویہ کو تنصیف کرتا ہے اور سامنے والے ضلع کو ملتا ہے۔ صاف ظاہر ہے کہ یہ مثلث کے تینوں زاویوں کے ناصف ہوتے ہیں۔

مثلث کے زاویوں کے ناصف کھینچنا:

مدارج عمل:



• کوئی مثلث $\triangle ABC$ بنائیے۔

• پرکاری کی مدد سے مناسب رداس کی قوس $\overline{AC}$ ، $\overline{AB}$ پر کاٹی ہوئی لگائی۔

• کو بالترتیب نقاط X اور Y پر کاٹی ہوئی لگائی۔

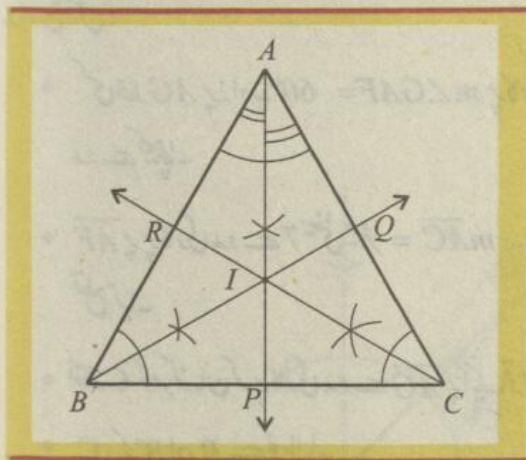
• X اور Y کو باری باری مرکز مان کر اسی رداس کی ایک

دوسرے کو نقطہ Z پر قطع کرتی ہوئی قوسیں لگائیں۔

• AZ کو ملا کر بڑھایا جس نے $\overline{BC}$ کو نقطہ P پر کاٹا۔ پس $\overline{AP}$ زاویہ A کا مطلوبہ ناصف ہے۔

اسی طرح دوسرے زاویوں کے ناصف کھینچے جاسکتے ہیں۔

اگر ہم مثلث کے تمام زاویوں کے ناصف کھینچیں تو ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ یہ آپس میں ایک نقطہ پر ملتے ہیں مثلاً



• کوئی سی مثلث $\triangle ABC$ کھینچیے۔

• زاویوں $\angle B$ اور $\angle C$ کے بالترتیب ناصف $\overline{BQ}$ اور $\overline{CR}$

کھینچیے جو کہ ایک دوسرے کو نقطہ I پر کاٹتے ہیں۔

• A سے I کو ملا کر بڑھائیے۔ جو $\overline{BC}$ کو نقطہ P ملا۔

• $\angle BAP$ اور $\angle CAP$ کی پروٹریکٹر کی مدد سے پیمائش کی۔

ہمیں پتا چلا کہ $m\angle BAP = m\angle CAP$

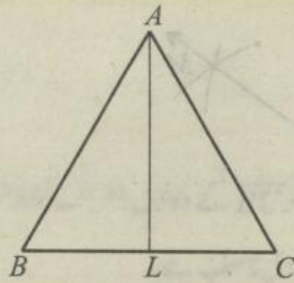
جس سے ظاہر ہوا کہ $\overline{AP}$ مثلث ABC کے تیسرے زاویے کا ناصف ہے۔

ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ دو زاویوں کے ناصفوں کا نقطہ تقاطع تیسرے زاویے کے ناصف پر بھی واقع ہے۔

مثلث کے زاویوں کے ناصف باہم ایک نقطہ پر مرکوز ہوتے ہیں۔
یعنی وہ ایک ہی نقطہ پر ملتے ہیں۔

ہمیں علم ہونا چاہیے

وہ نقطہ جہاں مثلث کے تینوں زاویوں کے ناصف ملتے ہیں، مثلث کا محصور مرکز کہلاتا ہے۔

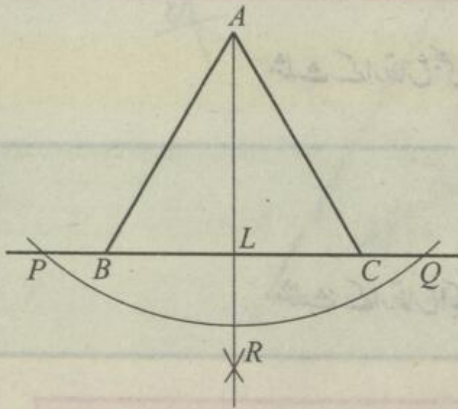


مثلث کے ارتفاع Altitudes of a Triangle

مثلث کا ارتفاع اس کے کسی راس سے مخالف ضلع پر عمود ہوتا ہے۔ واضح رہے کہ کسی مثلث کے تین ارتفاع ہوتے ہیں۔ ہر ایک راس سے مخالف ضلع پر عمود۔

مثلث کے ارتفاع کھینچنا

مدارج عمل:



• کوئی سی بھی مثلث ABC کھینچیے۔

• A کو مرکز مان پر مناسب رداس کی قوس اس طرح

لگائیے جو BC کو دو نقاط P اور Q پر کاٹے۔

• $\overline{PQ}$ کے نصف سے زیادہ رداس کی P اور Q

کو باری باری مرکز مان کر آپس میں نقطہ R پر قطع

کرتی ہوئی قوسیں لگائیں۔

• نقطہ A کو R سے ملایا۔ جس نے $\overline{BC}$ کو L پر کاٹا پس $\overline{AL}$ مطلوبہ ارتفاع ہے۔

• اسی طرح دوسرے ارتفاع کھینچے جاسکتے ہیں۔

ہم نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ مثلث کے تینوں ارتفاع ایک نقطہ میں گزرتے ہیں۔ (بڑھانے پر اگر ضروری ہو) مثلاً

• کوئی مثلث ABC بنائیے۔

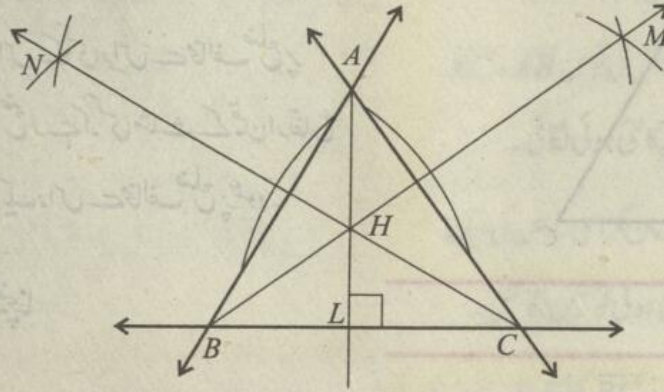
نقاط B اور C سے بالترتیب $\overline{BM}$ اور $\overline{CN}$ عمود گرایے۔

فرض کیا $\overline{BM}$ اور $\overline{CN}$ ایک نقطہ H پر ملتے ہیں (بڑھانے پر اگر ضرورت پڑے)۔

A کو H سے ملا کر بڑھائیے تاکہ وہ نقطہ L پر ملے۔

زاویہ ALC کی پیمائش کیجیے۔

ہمیں پتا چلتا ہے کہ $m\angle ALC = 90^\circ$ لہذا $\overline{AL}$ بھی مثلث ABC کا ارتفاع ہے۔



مثلث کے ارتفاع بھی ہم نقطہ ہوتے ہیں یعنی وہ ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔

ہمیں علم ہونا چاہیے کہ

مثلث کے ارتفاع ایک نقطہ پر ملتے ہیں جو کہ مرکز ارتفاع کہلاتا ہے۔

نوٹ:

- ◀ کسی متساوی الساقین مثلث کے مساوی اضلاع پر گرائے گئے ارتفاع مساوی ہوتے ہیں۔
- ◀ متساوی الساقین مثلث کے قاعدہ پر ارتفاع اس کی تنصیف کرتا ہے۔
- ◀ مساوی الاضلاع کے ارتفاع مساوی ہوتے ہیں۔
- ◀ کسی مثلث کے ارتفاع ہم نقطہ ہوتے ہیں یعنی وہ ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔

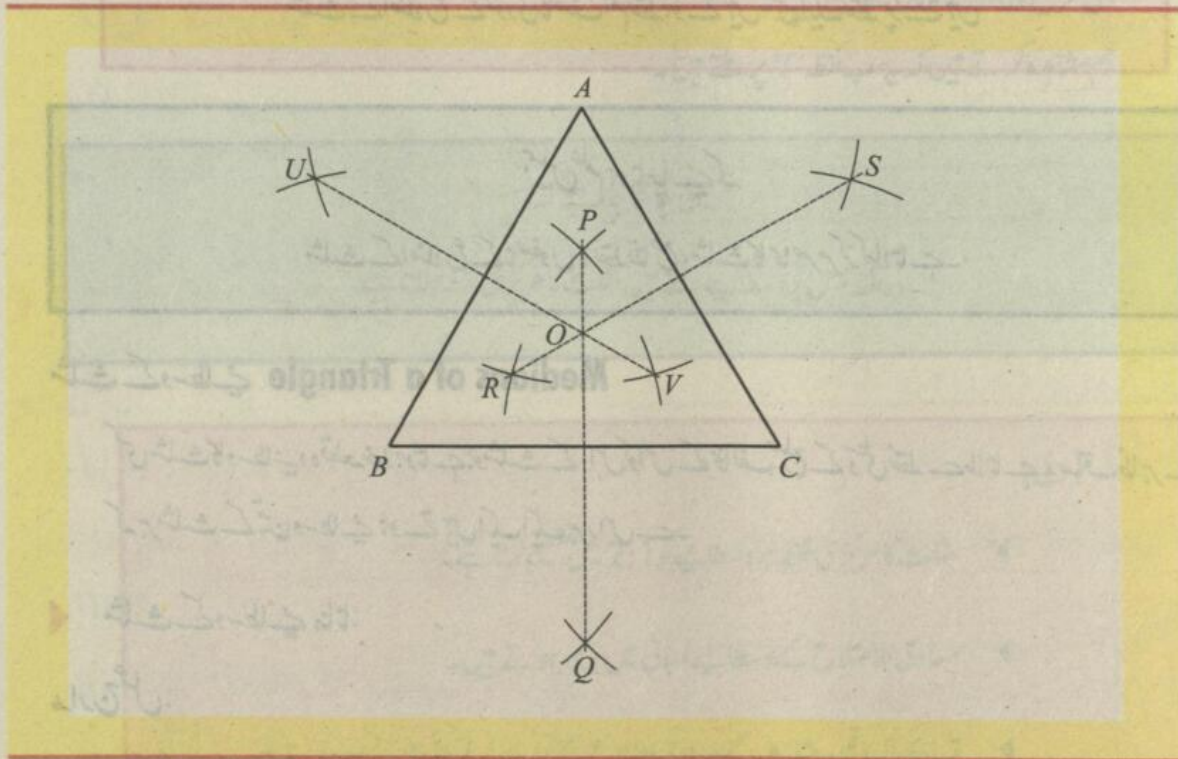
Perpendicular Bisectors Of The Sides Of A Triangle مثلث کے اضلاع کے عمودی ناصف

ایسا قطعہ خط جو کسی مثلث کے ضلع کی تنصیف کرے اور وہ اس ضلع پر عمود ہو تو وہ مثلث کے اس ضلع کا عمودی ناصف کہلاتا ہے۔ مثلث کے ہر ضلع پر عمودی ناصف ہوتا ہے۔ کسی مثلث کے تین اضلاع کے ہر ایک کے عمودی ناصف ہوتے ہیں۔

◀ مثلث کے اضلاع کے عمودی ناصف کھینچنا

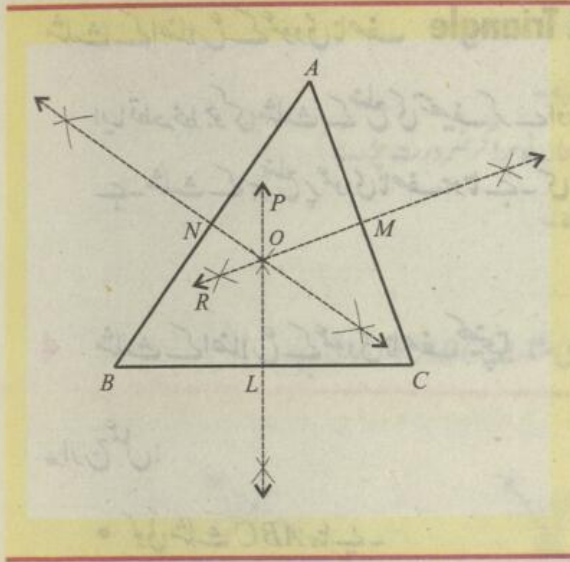
مدارج عمل:

- کوئی مثلث ABC بنائیے۔
- $\overline{BC}$ کے نصف سے زائد مقدار کے رداس کی B اور C کو مرکز مان کر $\overline{BC}$ کے دونوں اطراف نقاط P اور Q پر قطع کرتی قوسیں لگائیے۔ P اور Q کو ملائیے پس $\overline{PQ}$ ضلع $\overline{BC}$ کا عمودی ناصف ہے۔



- اسی طرح $\overline{AC}$ اور $\overline{AB}$ کے بالترتیب $\overline{UV}$ اور $\overline{RS}$ عمودی ناصف کھینچیے۔

- (اگر ضرورت ہو ان عمودی ناصفوں کو بڑھائیے) یہ نقطہ O پر ملتے ہیں۔



ہم مشاہدہ کرتے ہیں یہ ایک نقطہ پر ملتے ہیں

• کوئی مثلث ABC بنائیے۔

• اضلاع $\overline{BC}$ اور $\overline{AC}$ پر بالترتیب عمودی ناصف $\overline{PL}$

اور $\overline{RM}$ کھینچیے جو کہ نقطہ O پر کاٹتے ہیں۔ O سے عمود

$\overline{AB}$ ، $\overline{ON}$ پر کھینچیے۔ ماپنے سے پتا چلتا ہے کہ

$$m\overline{AN} = m\overline{NB}$$

پس $\overline{ON}$ عمودی ناصف ہے $\overline{AB}$ کا۔

پس مثلث ABC کے تینوں عمودی ناصف ایک ہی نقطہ O میں سے گزرتے ہیں۔

مثلث کے اضلاع کے عمودی ناصف ہم نقطہ ہوتے ہیں یعنی ایک نقطہ پر ملتے ہیں

ہمیں علم ہونا چاہیے کہ

مثلث کے اضلاع کے ناصفوں کا نقطہ تقاطع، مثلث کا محاصرہ مرکز کہلاتا ہے۔

مثلث کے وسطانیے Medians of a Triangle

کسی مثلث کا وسطانیہ وہ قطعہ خط ہوتا ہے جو مثلث کے راس کو اس کے مخالف ضلع کے وسطی نقطہ سے ملاتا ہے۔ صاف ظاہر ہے کہ ہر مثلث کے تین وسطانیے ہوتے ہیں ایک ایک ہر راس سے۔

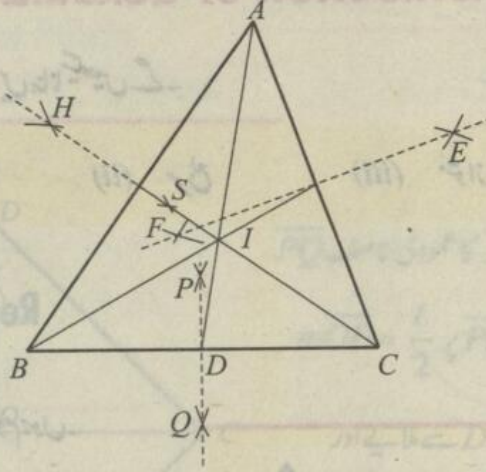
◀ مثلث کے وسطانیے بنانا:

مدارج عمل:

• کوئی مثلث ABC بنائیے۔

• $\overline{BC}$ کے نصف سے زائد کی پرکار کھول کر B کو مرکز مان کر $\overline{BC}$ کے دونوں طرف قوسیں لگائیے اسی طرح C کو مرکز مان کر

$\overline{BC}$ کے دونوں طرف اسی رداس کی قوسیں لگائیے جو پہلی قوسوں کو بالترتیب نقاط P اور Q پر کاٹتی ہیں۔



- P اور Q کو ملائیے جو BC پر نقطہ D میں گزرتا ہے، پس نقطہ D BC کا وسطی نقطہ ہے۔
- A کو D سے ملائیے پس AD مطلوبہ وسطانیہ ہے۔
- اسی طرح B اور C سے وسطانیے کھینچیے۔
- ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ یہ سب نقطہ I پر ملتے ہیں۔

ہمیں جاننا چاہیے کہ:

وہ نقطہ جس پر وسطانیے ملتے ہیں مثلث کا مرکزی نقطہ کہلاتا ہے

نوٹ:

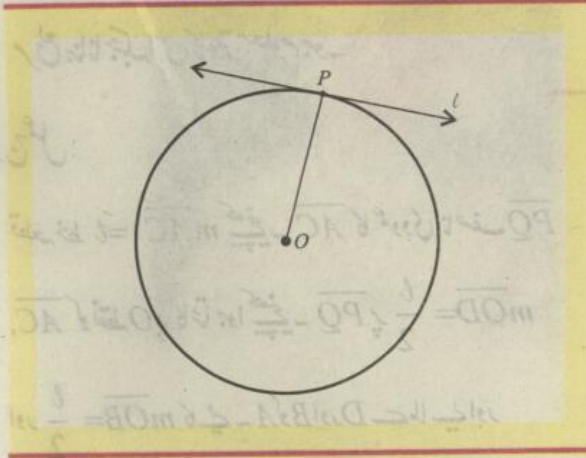
◀ مثلث کا مرکزی نقطہ ہر وسطانیے کو 2:1 میں تقسیم کرتا ہے۔

◀ مساوی الاضلاع کے وسطانیے لمبائی میں برابر ہوتے ہیں۔

◀ متساوی الساقین مثلث کے مساوی اضلاع کے وسطانیے لمبائی میں برابر ہوتے ہیں۔

◀ مثلث کے وسطانیے ایک ہی نقطہ پر مرکوز ہوتے ہیں۔

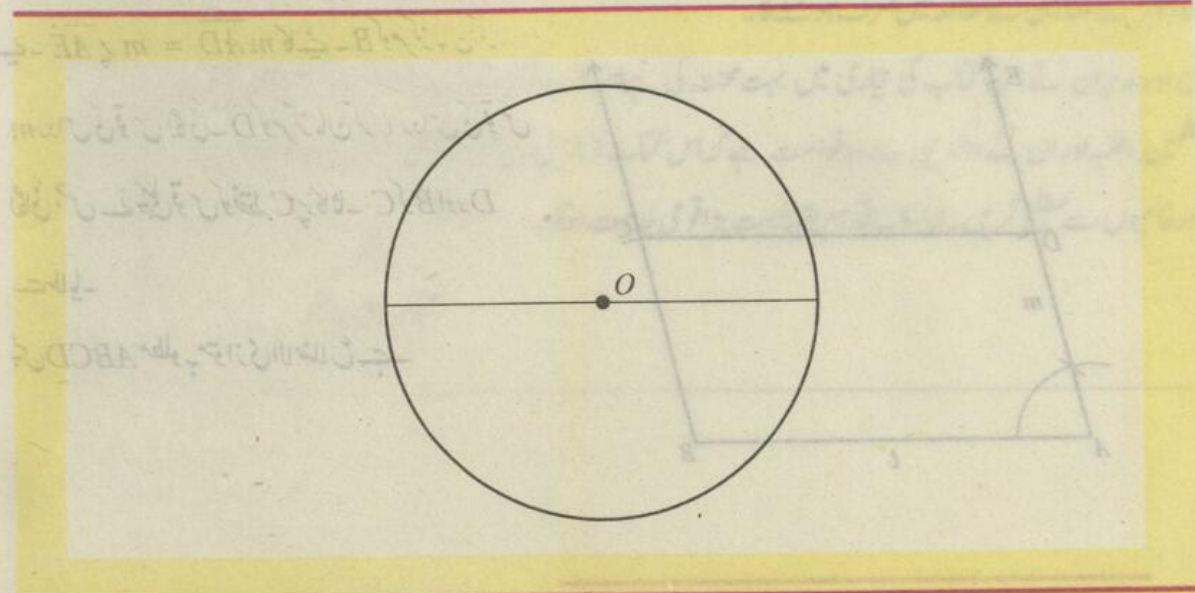
8.3 دائرہ کا مماس TANGENT TO THE CIRCLE



دائرہ کے ساتھ ہم سطح ایسا خط جو دائرہ کو ایک نقطہ پر مس کرتا ہو
دائرہ کا خط مماس کہلاتا ہے اور یہ نقطہ جس پر خط مماس دائرہ
کو مس کرتا ہے، نقطہ مماس کہلاتا ہے۔

8.3.1 دائرہ کا مرکز معلوم کرنا Locate the Centre of the Circle

- شکل میں ایک دائرہ دکھایا گیا ہے۔
- دائرہ کا مرکز نقطہ "O" پر ہے۔
- کسی دائرہ کا صرف ایک مرکز ہوتا ہے۔
- دائرہ کا مرکز اس کے خم پر واقع نہیں ہوتا۔
- دائرہ کا مرکز، قطر کا وسطی نقطہ ہوتا ہے۔
- دائرہ کے تمام نقاط مرکز سے یکساں فاصلہ پر ہوتے ہیں۔ اور ان کے فاصلے دائرہ کے رداس کہلاتے ہیں۔



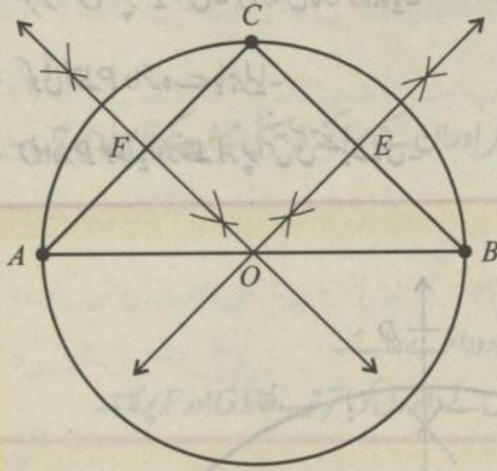
Draw a Circle Passing Through Three Non-Collinear Points

8.3.2 تین غیر ہم خط نقاط میں سے دائرہ کھینچنا

A, B, C اور تین غیر ہم خط نقاط ہیں۔ ہم A, B, C اور میں سے دائرہ گزارتے ہیں۔

مدارج عمل:

A, B, C اور تین غیر ہم خط نقاط لیجیے۔



1- A کو B سے ملائیے B کو C سے ملائیے اور C کو A سے

ملائیے اس طرح شکل میں $\triangle ABC$ بن جاتی ہے۔

2- اضلاع $\overline{BC}$ ، $\overline{AC}$ کے عمودی ناصف کھینچیں جو کہ $\triangle ABC$ اضلاع کو بالترتیب نقاط F اور E پر کاٹتے ہیں۔

3- یہ ناصف نقطہ "O" پر ملتے ہیں۔

4- "O" کو مرکز مان کر رداس $\overline{OA}$ کے برابر پرکار کھول کر دائرہ لگائیے۔ یہ دائرہ نقاط B اور C میں سے بھی گزرتا ہے۔

$$m \overline{OA} = m \overline{OB} = m \overline{OC}$$

8.3.3 دائرہ کا مماس Tangent to a Circle

دائرہ کے محیط پر واقع نقطہ پر دائرہ کا مماس کھینچنا

مدارج عمل:

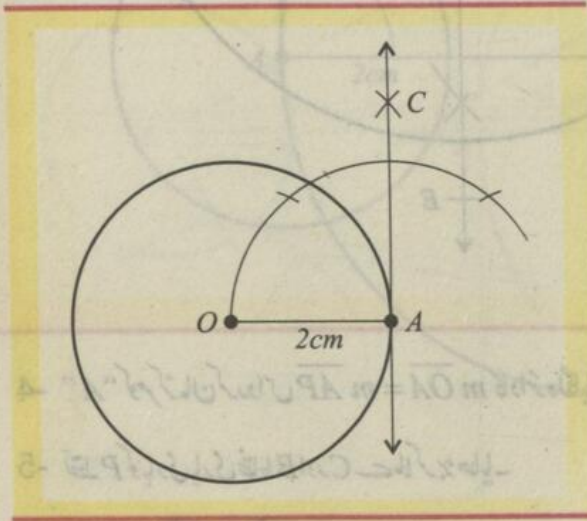
1- نقطہ "O" کو مرکز مان کر 2 سینٹی میٹر رداس کا دائرہ بنایا۔

2- دائرہ پر کوئی نقطہ "A" لیا۔ نقطہ "A" کو "O" سے ملایا۔

3- پرکار کی مدد سے نقطہ "A" پر

$$m \angle OAC = 90^\circ$$

4- $\overrightarrow{AC}$ دائرہ کا مطلوبہ مماس ہے۔



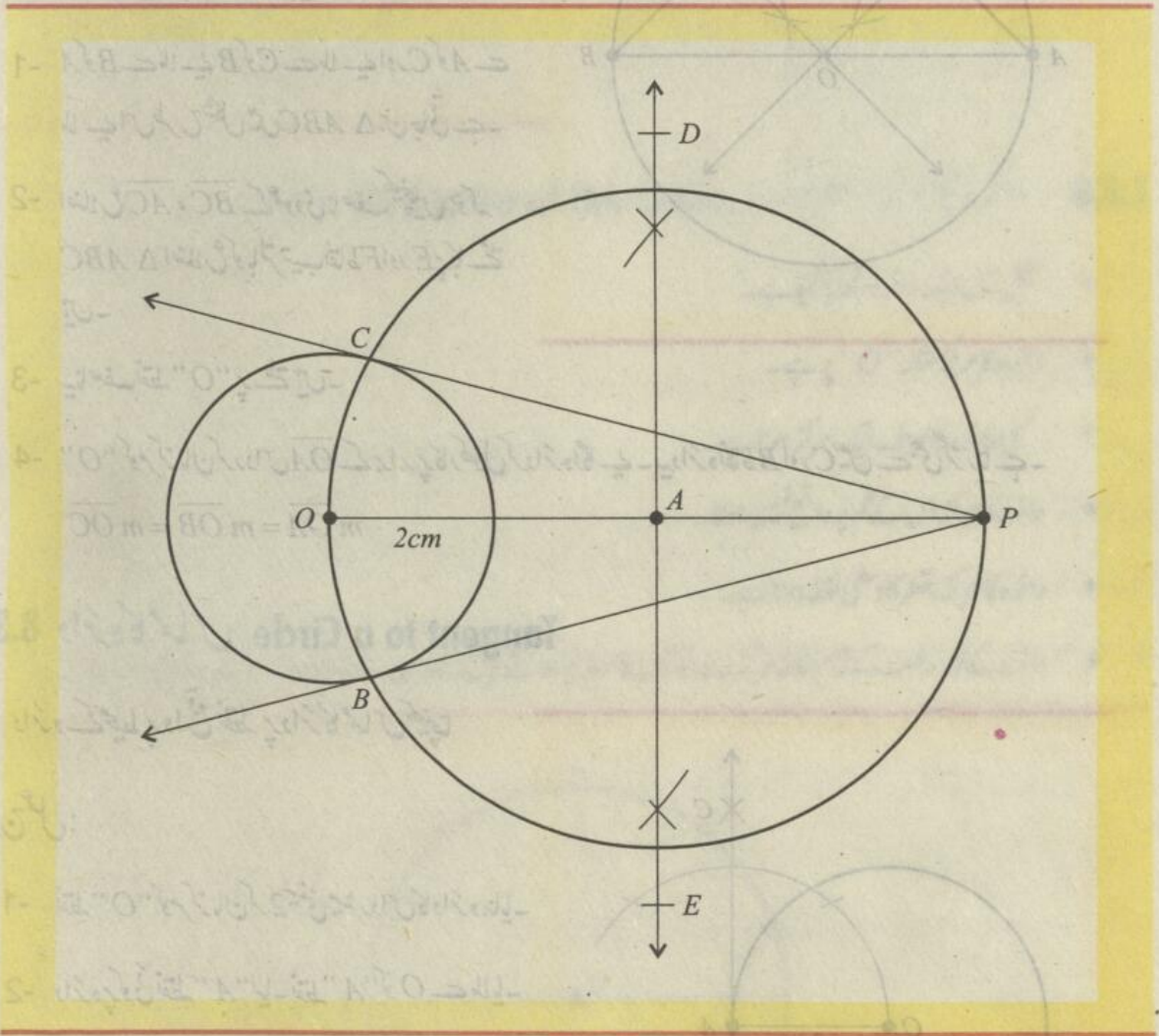
◀ دائرہ کا بیرونی نقطہ سے مماس کھینچنا

مدارج عمل:

1- مرکز "O" پر 2 سینٹی میٹر داس کا دائرہ بنایا۔

2- کوئی نقطہ P دائرہ سے باہر لیا۔

3- O اور P کو ملایا اور نقطہ A پر اس کی تنصیف کی۔



4- "A" کو مرکز مان کر داس $m \overline{OA} = m \overline{AP}$ کا دائرہ لگایا جس نے دیے گئے دائرہ کو نقاط B اور C پر کاٹا۔

5- نقطہ P کو باری باری نقاط B اور C سے ملا کر بڑھایا۔

6- نقطہ P سے $\overrightarrow{PB}$ اور $\overrightarrow{PC}$ دو دیے ہوئے دائرہ پر مماس ہیں۔

8.3.4 دو یکساں دائروں کا مماس کھینچنا Drawing Tangent to Two Equal Circles

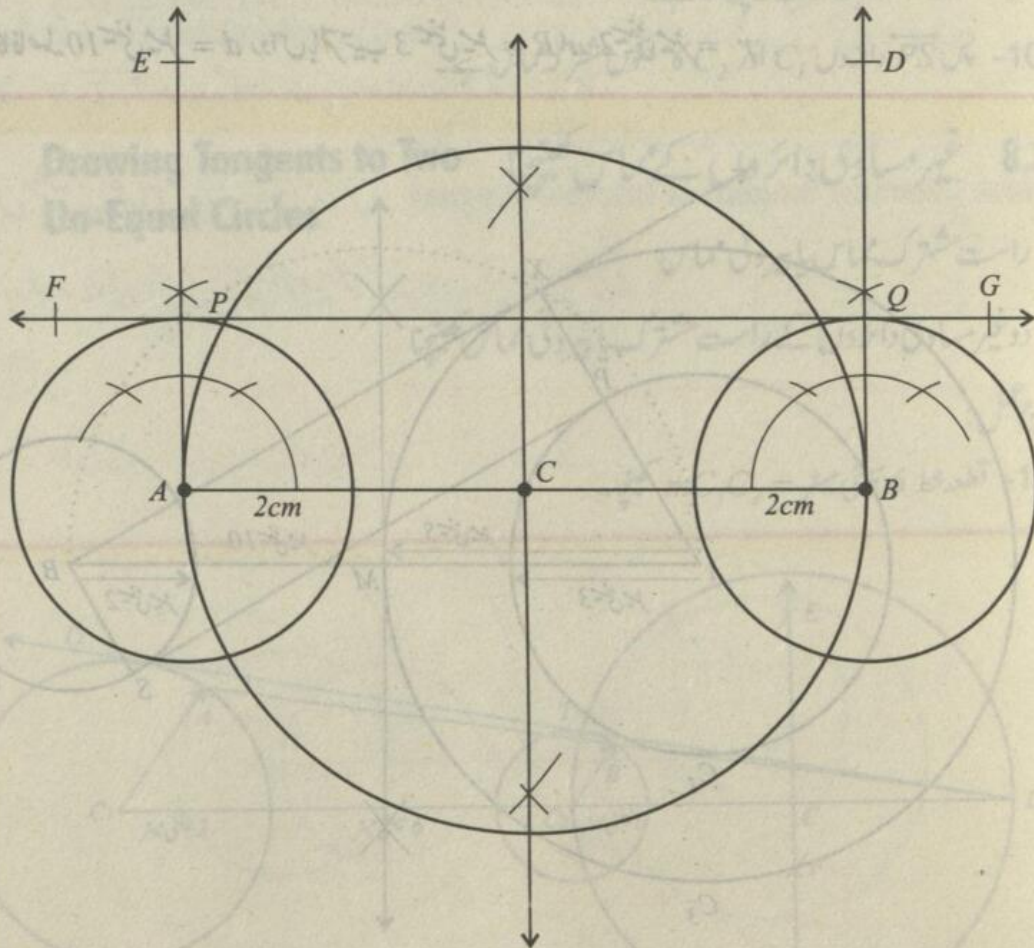
Direct Common Tangent or External Tangent مشترک راست مماس یا بیرونی مماس

اگر مشترک مماس کے دونوں دائروں کے ساتھ نقاط مماس دائروں کے مراکز کو ملانے والے خط ایک ہی جانب واقع ہوں تو وہ مشترک راست مماس یا بیرونی مماس کہلاتا ہے۔

◀ دو دائروں کا مشترک راست مماس کھینچنا جن کے رداس 2 سینٹی میٹر اور ان کے مراکز 5 سینٹی میٹر کے فاصلہ پر ہیں۔

مدارج عمل:

- 1- قطعہ خط AB برابر 5 سینٹی میٹر کھینچنا۔
- 2- A اور B کو باری باری مرکز لے کر ہر ایک پر 2 سینٹی میٹر رداس کے دو دائرے بنائے۔
- 3- $m\angle BAE = 90^\circ$ اور $m\angle ABD = 90^\circ$ بنائے جنہوں نے دائروں کو بالترتیب نقاط F اور G پر کاٹا۔



4- G اور F کو ملایا۔

5- $\overline{GF}$ مطلوبہ مشترک بیرونی مماس ہے۔

Transverse Common Tangent or Internal Tangent معکوس مشترک مماس یا اندرونی مماس

اگر دو دائروں کے مراکز مشترک ہوں تو ایسا مماس معکوس مشترک مماس کہلاتا ہے۔

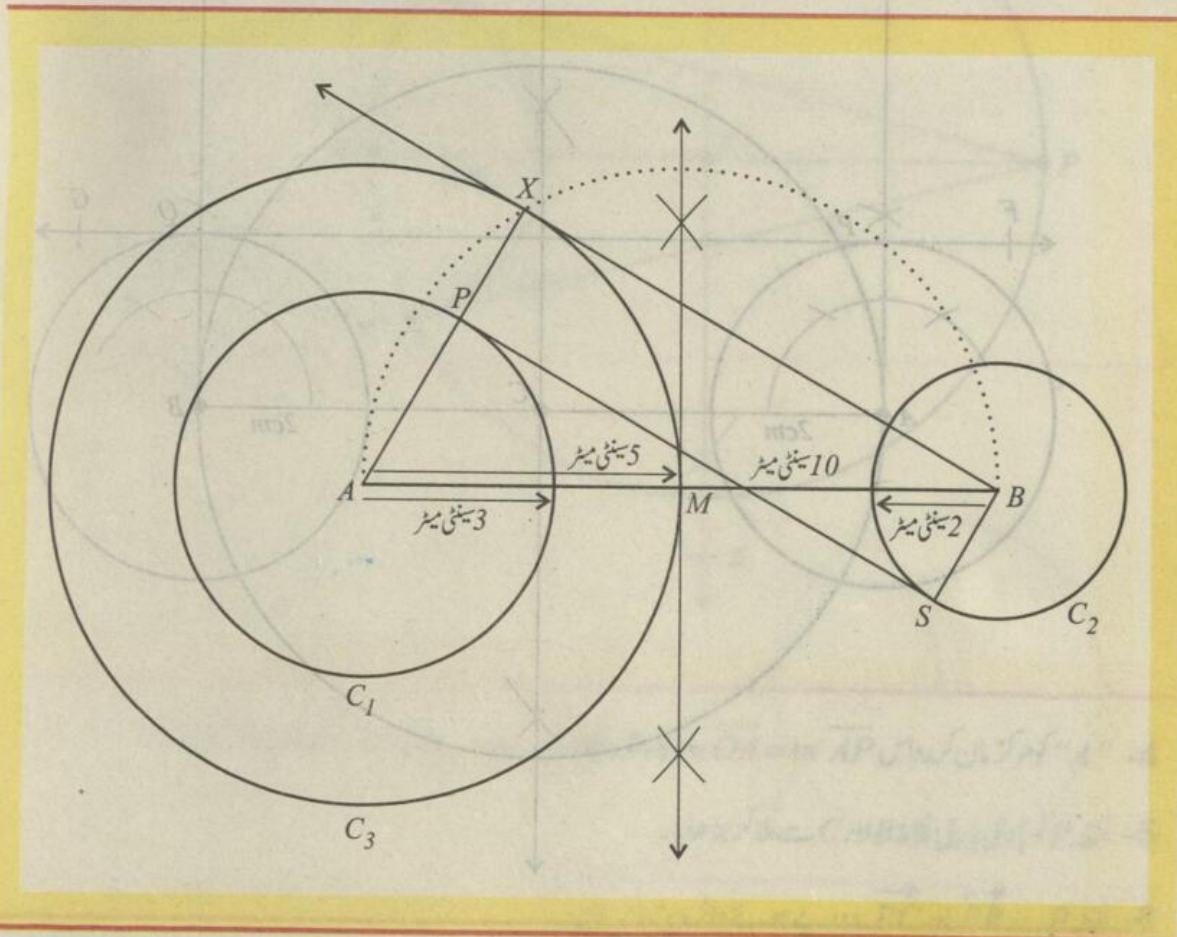
◀ دودائروں کے مشترک معکوس مماس کھینچنا۔

دو دائرے جن کے رداس بالترتیب 3 سینٹی میٹر اور 2 سینٹی میٹر ہیں اور ان کے مراکز 10 سینٹی میٹر کے فاصلہ پر ہیں

ان کے مشترک مکتوس کھینچے۔

مدارج عمل:

مراکز کا فاصلہ $d = 10$ سینٹی میٹر d اس بات پر ترتیب $R = 3$ سینٹی میٹر R اور $r = 2$ سینٹی میٹر r



- 1- قطعہ خط 10 سینٹی میٹر $m\overline{AB}$ کھینچئے۔
- 2- A مرکز پر دائرہ C_1 رداس 3 سینٹی میٹر کا کھینچئے۔
- 3- B مرکز پر دائرہ C_2 رداس 2 سینٹی میٹر کا کھینچئے۔
- 4- A مرکز پر دائرہ 5 سینٹی میٹر $2 + 3$ رداس کا کھینچئے۔
- 5- $\overline{AB}$ کا درمیانی نقطہ M لیکر نصف دائرہ $m\overline{MA} = m\overline{MB}$ رداس کا کھینچئے جس نے 5 سینٹی میٹر رداس والے دائرے کو نقطہ X پر کاٹا۔
- 6- نقطہ B سے BX مماس 5 سینٹی میٹر رداس والے دائرے C_3 پر کھینچا۔
- 7- A کو X سے ملایا (جس نے دائرہ C_1 کو نقطہ P پر کاٹا)
- 8- سیٹ سکوائر کے استعمال سے نقطہ B سے $\overline{AP} \parallel \overline{BS}$ کھینچا۔
- 9- $\overline{BS}$ دائرہ C_2 کو نقطہ S پر کاٹتا ہے۔
- 10- پس $\overline{PS}$ دائروں C_1 اور C_2 کا معکوس مشترک مماس ہے۔

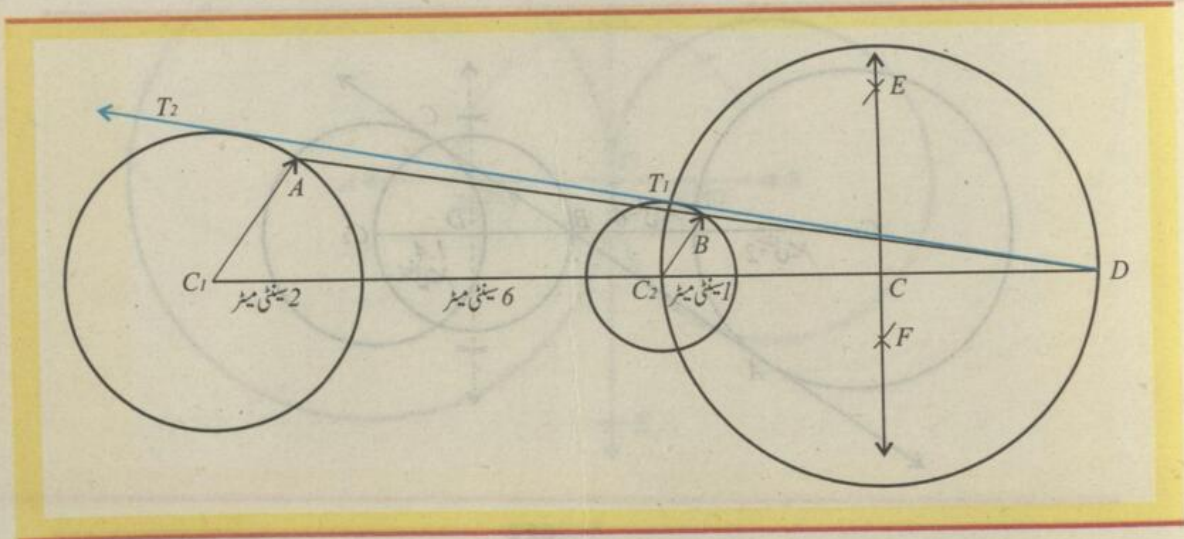
8.3.5 غیر مساوی دائروں کے مماس کھینچنا

راست مشترک مماس یا بیرونی مماس

◀ دو غیر مساوی دائروں کے راست مشترک یا بیرونی مماس کھینچنا

مدارج عمل:

- 1- قطعہ خط 6 سینٹی میٹر mC_1C_2 کھینچا۔



- 2- C_1 کو مرکز مان کر 2 سینٹی میٹر رداس کا دائرہ لگایے۔
- 3- C_2 کو مرکز مان کر 1.4 سینٹی میٹر رداس کا دائرہ لگایے۔
- 4- $\overline{C_1C_2}$ کو 1.4:2 میں تقسیم کیجیے۔
- 5- قطعہ خط BC_2 کی نقطہ D پر تنصیف کیجیے۔
- 6- D کو مرکز مان کر $m\overline{BD} = m\overline{DC_2}$ رداس کا دائرہ لگایے جو مرکز C_2 والے دائرے کو نقطہ C پر کاٹتا ہے۔
- 7- $\overline{CB}$ کو ملاتا ہوا خط B سے پرے بڑھایا جس نے C_1 مرکز والے دائرہ کو نقطہ A پر مس کیا۔
- 8- پس $\overline{AC}$ دیے گئے دائروں کا معکوس مماس ہے۔

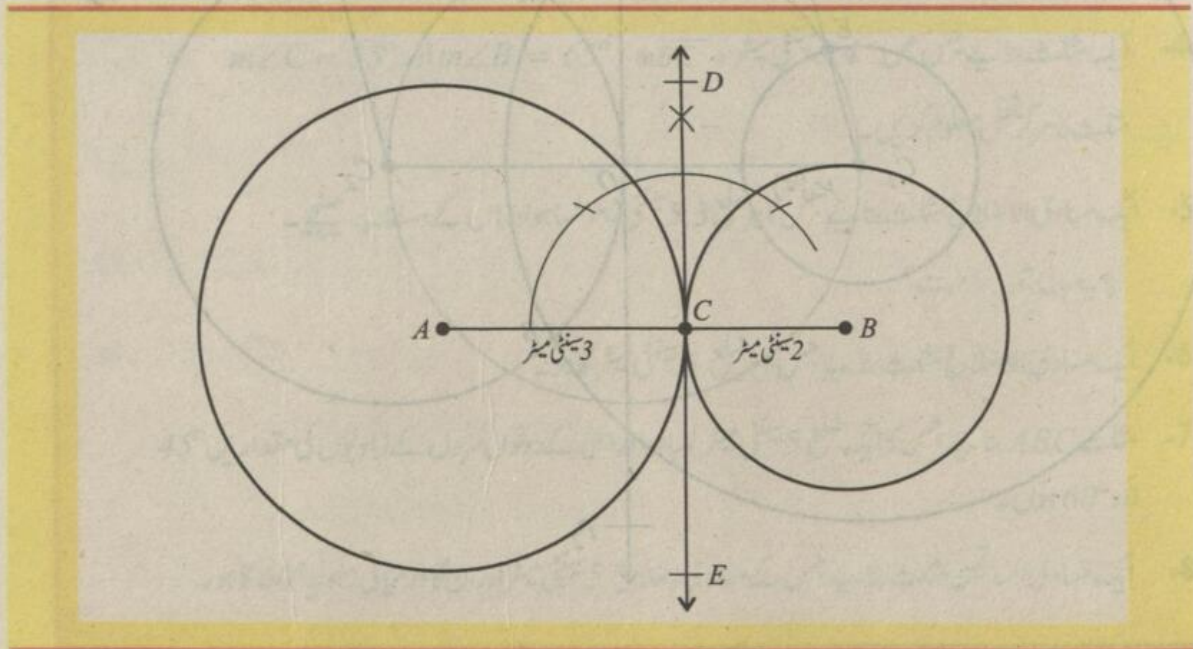
8.3.6 مماس کھینچنا Drawing Tangents

دو غیر مساوی مس کرتے ہوئے دائروں کا مماس Tangent to Two Unequal Touching Circles

◀ دو غیر مساوی مس کرتے ہوئے دائروں کا مماس کھینچیے۔

مدارج عمل:

- 1- نقطہ C پر مس کرتے ہوئے دائرے جن کے رداس 3 سینٹی میٹر اور 2 سینٹی میٹر ہوں کھینچیے۔



2- نقطہ C پر زاویہ $\angle ACD = 90^\circ$ م کھینچئے۔

3- C میں گزرتا ہوا خط $\overline{DE}$ کھینچئے۔

4- $\overline{DE}$ مطلوبہ دو غیر مساوی دائروں کا مشترک مماس ہے۔

Tangent to Two Unequal Intersecting Circles دو غیر مساوی متقاطع دائروں کا مماس

◀ دو غیر مساوی متقاطع دائروں کا مماس کھینچئے۔

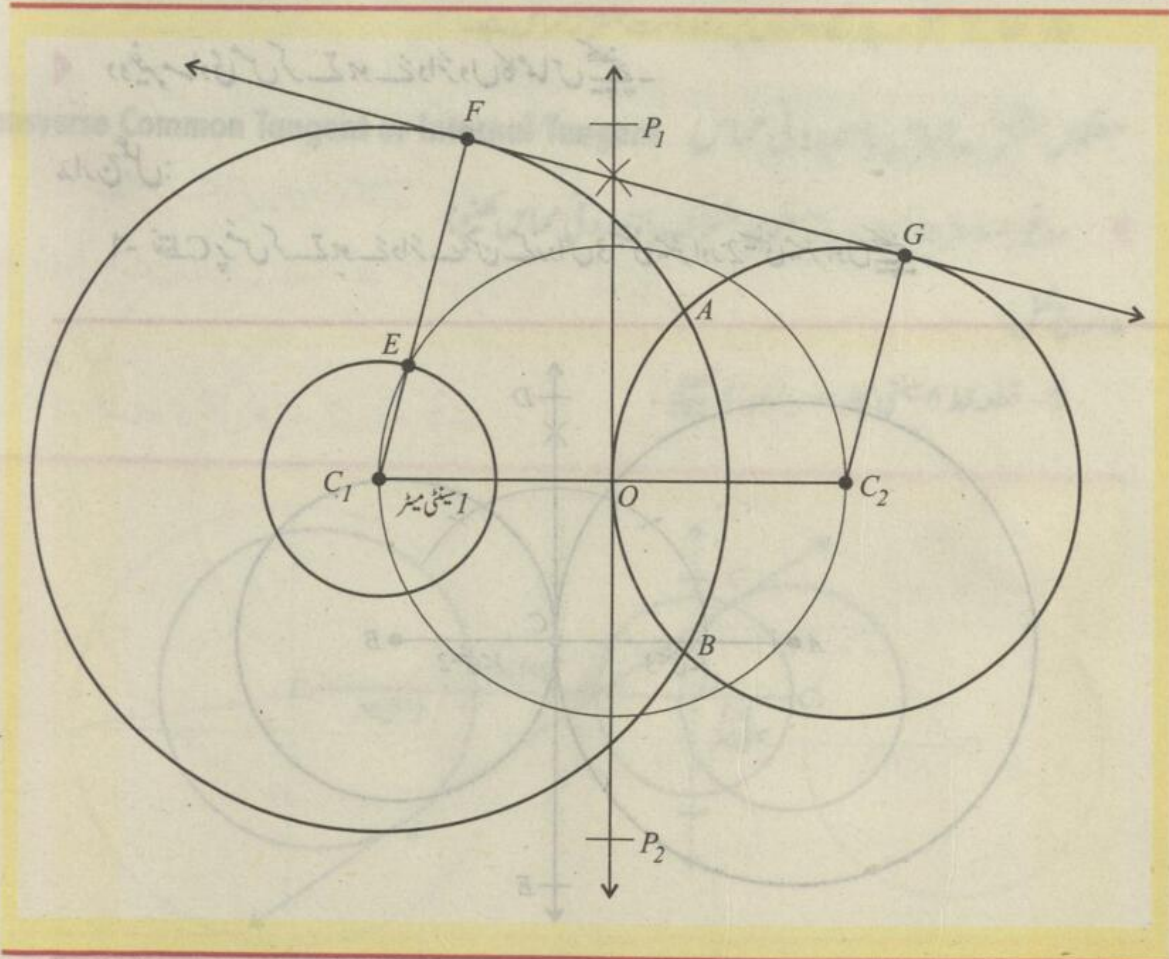
بناوٹ:

1- قطعہ 4 سینٹی میٹر $C_1C_2 =$ کھینچئے۔

2- C_1 اور C_2 کو بالترتیب مراکز مان کر 3 سینٹی میٹر اور 2 سینٹی میٹر رداس کے دائرہ لگائیے۔ جو ایک دوسرے کو

نقاط A اور B پر کاٹتے ہیں۔

3- C_1 کو مرکز مان کر 1 سینٹی میٹر = 2 سینٹی میٹر - 3 سینٹی میٹر کا دائرہ لگائیے۔



4- C_1C_2 کی نقطہ O پر تنصیف کیجیے۔

5- O کو مرکز مان کر $m\overline{C_1O} = m\overline{C_2O}$ رداس کا دائرہ کھینچیے۔ جس نے C_1 پر واقع اندرونی دائرے کو نقطہ E پر کاٹا۔

6- C_1 کو E سے ملا کر بڑھایا جس نے اس کے ہم مرکز دائرہ کو نقطہ F پر کاٹا۔

7- C_2 سے $\overline{C_1F}$ کے متوازی خط کھینچا جس نے C_2 مرکز والے دائرہ کو نقطہ G پر کاٹا۔

8- F اور G کو ملا کر لائن بنائیے۔

9- $\overline{FG}$ دو غیر مساوی دائروں پر مطلوبہ راست مشترک مماس ہے۔

مشق 8.1

1- مثلث ABC بنائیے جس میں $m\overline{BC} = 5.4$ سینٹی میٹر ، $m\overline{AB} = 4.3$ سینٹی میٹر اور

$m\overline{AC} = 3.9$ سینٹی میٹر ہے۔ اس کا مرکز محصور معلوم کیجیے۔

2- مثلث ABC بنائیے جس میں $m\overline{BC} = 4.6$ سینٹی میٹر ، $m\overline{AB} = 5$ سینٹی میٹر اور $\angle B = 110^\circ$

3- ایک مساوی الاضلاع مثلث ABC کھینچیے جس میں $m\overline{AB} = m\overline{BC} = m\overline{AC} = 5$ سینٹی میٹر

اس کے ارتقاہ کیجیے۔ کیا یہ لمبائی میں برابر ہیں؟

4- ایک مثلث بنائیے جس میں $m\overline{BC} = 5.4$ سینٹی میٹر ، $m\angle B = 65^\circ$ اور $m\angle C = 55^\circ$

مثلث کا مرکز ثقل معلوم کریں۔

5- ایک مساوی الاضلاع مثلث بنائیے جس کا ہر ضلع 5.3 سینٹی میٹر لمبا ہو اور اس کے وسطانیے کھینچیے۔

کیا یہ لمبائی میں برابر ہے؟

6- ایک مساوی الاضلاع مثلث بنائیے جس کا ہر ضلع 6 سینٹی میٹر کا ہو۔

7- مثلث ABC بنائیے جس کا ایک ضلع 5 سینٹی میٹر لمبا ہو اور اس کے دونوں سروں کے زاویوں کی مقداریں 45°

اور 60° ہوں۔

8- ایک متساوی الساقین مثلث بنائیے جس کے مساوی اضلاع 5 سینٹی میٹر اور ان کا درمیانی زاویہ 60° کا ہو۔

- 9- ایک مستطیل بنایے جس کے متضلع اضلاع کی لمبائیاں 4 سینٹی میٹر اور 3 سینٹی میٹر ہوں۔
- 10- ایک مستطیل بنایے جس کا ایک 6 سینٹی میٹر اور متضلع وتر 9 سینٹی میٹر کا ہو۔
- 11- ایک مربع بنایے جس کا ہر ضلع 5 سینٹی میٹر ہو۔
- 12- ایک مربع بنایے جس کا ہر ضلع 3.5 سینٹی میٹر کا ہو۔
- 13- ایک مستطیل بنایے جس کے متضلع اضلاع 5 سینٹی میٹر اور 4 سینٹی میٹر ہوں اور ان کے درمیان 90° کا زاویہ ہو۔
- 14- ایک مستطیل بنایے جس کے ایک ضلع کی مقدار 8 سینٹی میٹر اور دونوں وتروں میں سے ہر ایک 10 سینٹی میٹر کا ہو۔
- 15- ایک مستطیل بنایے جس میں $m \overline{AB} = 6.5$ سینٹی میٹر اور $m \overline{AD} = 4.8$ سینٹی میٹر اور $m \angle BAD = 90^\circ$ اس کے وتروں کی پیمائش کیجیے۔
- 16- درج ذیل چوکوروں کے نام بتائیے کہ
- وتروں کی لمبائیاں برابر متضلع اضلاع غیر مساوی ہوں۔
 - وتر بھی مساوی ہوں اور متضلع اضلاع بھی مساوی ہوں۔
 - تمام اضلاع لمبائی میں برابر اور ایک زاویہ 90° کا ہو۔
 - تمام زاویے برابر مگر متضلع اضلاع غیر مساوی ہوں۔
- 17- ایک مستطیل بنایے جن کے اضلاع کی لمبائیاں 10 سینٹی میٹر اور 6 سینٹی میٹر ہوں۔
- 18- ایک مربع بنایے جس کے ہر ضلع کی لمبائی 6 سینٹی میٹر ہو۔
- 19- درج ذیل مثلثوں کے نام بتائیے۔
- جس کے تینوں اضلاع کی لمبائیاں برابر ہوں۔
 - جس کے دو اضلاع کی لمبائیاں برابر ہوں۔
 - کوئی بھی ضلع دوسرے ضلع کے برابر نہ ہو۔

20- ایک دائرہ جس کا مرکز O اور رداس 5 سینٹی میٹر ہو بنائیے۔ دائرہ کا قطعہ کھینچنے کے لیے ضروری اقدامات کی وضاحت کیجیے۔

21- کسی بھی رداس دائرہ جس کا مرکز O ہو کھینچیے۔ اس کا قطر AB کھینچیے اور ایک نصف دائرہ کو سایہ دار بنائیے۔

22- سوال 21 میں نصف دائرہ علاقے میں 4 زاویوں کی نشاندہی کریں۔

23- 2 سینٹی میٹر رداس کا دائرہ مرکز O پر بنائیے۔ ایک وتر بنا کر قوس کبیرہ کا حصہ سایہ دار بنائیے۔

24- مرکز O پر دائرہ 2.5 سینٹی میٹر رداس کا بنائیے۔ وتر بنا کر قوس کبیرہ کا حصہ سایہ دار بنا کر ظاہر کیجیے۔

25- مرکز O پر 4 سینٹی میٹر لمبائی کے وتر والا نصف دائرہ بنائیے۔

26- 3 سینٹی میٹر لمبائی کے ضلع والے مربع کے راسوں میں سے گزرتا ہوا دائرہ بنائیے۔

27- ایک مثلث ABC جس میں 3 سینٹی میٹر $mAB =$ اور 4 سینٹی میٹر $mBC =$ اور راس B پر زاویہ قائمہ ہو۔
 A ، B اور C میں سے گزرتا ہوا دائرہ بنائیے۔

28- مساوی الاضلاع جس کے ہر ضلع کی لمبائی 4 سینٹی میٹر ہو، اس کے راسوں میں سے گزرتا ہوا دائرہ بنائیے۔

جائزہ مشق 8

I- صحیح جوابات کو دائرہ لگائیے۔

1. ایک مثلث میں وسطانیوں کی تعداد ہوتی ہے:

- | | |
|-------|-------|
| (a) 1 | (b) 2 |
| (c) 3 | (d) 4 |

2. ایک مثلث میں ارتفاع ہوتے ہیں:

- | | |
|-------|-------|
| (a) 1 | (b) 2 |
| (c) 3 | (d) 4 |

3. مثلث میں زاویوں کے ناصف ہوتے ہیں:

- | | |
|-------|-------|
| (a) 1 | (b) 2 |
| (c) 3 | (d) 4 |

4. کسی مثلث کے اضلاع کے ناصفوں کی تعداد ہوتی ہے:

- | | |
|-------|-------|
| (a) 1 | (b) 2 |
| (c) 3 | (d) 4 |

5. مثلث کے زاویوں کے ناصف ہوتے ہیں:

- | | |
|-----------------------|-----------------|
| (a) ایک نقطہ پر مرکوز | (b) ہم خط |
| (c) آپس میں عموداً | (d) غیر ہم نقطہ |

6. مثلث کے وسطانیے ہوتے ہیں:

- | | |
|-----------------------|-----------|
| (a) ایک نقطہ پر مرکوز | (b) ہم خط |
| (c) غیر ہم نقطہ | (d) 4 |

7. مثلث کے ارتفاع ہوتے ہیں:

- | | |
|-----------------------|-----------|
| (a) ایک نقطہ پر مرکوز | (b) ہم خط |
| (c) غیر ہم خط | (d) 5 |

8. مثلث کے ایک راس سے مخالف ضلع کے وسطی نقطہ کو ملانے والا خط کہلاتا ہے:

- | | |
|-------------------|-----------------|
| (a) زاویہ کا ناصف | (b) ارتفاع |
| (c) وسطانیہ | (d) ضلع کا ناصف |

9. مثلث کے راس سے مخالف ضلع پر عمود کہلاتا ہے:

- (a) زاویہ کا ناصف (b) وسطانیہ
(c) ارتفاع (d) ضلع کا ناصف

10. ہم مستوی دائرہ کے ساتھ ایک خط جو دائرہ کو صرف ایک نقطہ پر قطع کرے کہلاتا ہے:

- (a) خط مماس (b) وسطانیہ
(c) ارتفاع (d) خط عمود

-II خالی جگہوں کو پُر کیجیے۔

1. مثلث کے ارتفاع ہوتے ہیں۔

2. مثلث کے وسطانیے ہوتے ہیں۔

3. مثلث کے زاویوں کے ناصف ہوتے ہیں۔

4. مثلث کے تینوں اضلاع کے عمودی ناصف ہوتے ہیں۔

5. مثلث کے ایک راس کے مخالف ضلع پر عمود کہلاتا ہے۔

6. مثلث کے راس سے اس کے مخالف ضلع کے وسطی نقطہ کو ملانے والا خط کہلاتا ہے۔

7. خط جو مثلث کے کسی زاویہ کی تنصیف کرے کہلاتا ہے۔

8. ہر مثلث کے ارتفاع ہوتے ہیں۔

9. ہر مثلث کے وسطانیے ہوتے ہیں۔

10. ہر مثلث کے عمودی ناصف ہوتے ہیں۔

خلاصہ SUMMARY

- 1- کسی مثلث کے زاویہ کا ناصف وہ خط ہوتا ہے جو مثلث کے کسی زاویہ کی تنصیف کرے اور اس کا دوسرا سرا مخالف ضلع کو چھوئے۔
- 2- ہر مثلث کے تین زاویوں کے ناصف ہوتے ہیں، ہر ایک زاویہ کا ایک ناصف۔
- 3- مثلث کے ارتفاع کسی راس سے مخالف ضلع پر عمود ہوتا ہے۔
- 4- ہر مثلث کے تین ارتفاع ہوتے ہیں، ہر ایک راس سے ایک۔
- 5- ایسا قطعہ خط جو کسی مثلث کے ایک ضلع کی تنصیف کرے اور ضلع کے نقطہ تنصیف پر عمود بھی ہو تو وہ اس ضلع کا عمودی ناصف کہلاتا ہے۔
- 6- کسی مثلث کے عمودی ناصف تین ہوتے ہیں، ہر ایک ضلع کا ایک۔
- 7- وہ نقطہ جس پر مثلث کے تینوں زاویوں کے ناصف باہم ملتے ہیں مرکز محصور کہلاتا ہے۔
- 8- وہ نقطہ جس پر مثلث کے تینوں ارتفاع ملتے ہیں، مثلث کا مرکز عمود کہلاتا ہے۔
- 9- وہ نقطہ جس پر مثلث کے اضلاع کے تینوں عمودی ناصف ملتے ہیں، مثلث کا مرکز محاصر کہلاتا ہے۔
- 10- وہ نقطہ جس پر مثلث کے تینوں وسطانیے ملتے ہیں، مثلث کا مرکزی نقطہ کہلاتا ہے۔
- 11- دائرہ کے ساتھ ہم مستوی ایسا خط جو دائرہ کو صرف نقطہ پر کاٹتا ہے، دائرہ کا مماس کہلاتا ہے۔

رقبہ اور حجم AREAS AND VOLUMES

مسئلہ فیثاغورث
رقبہ
حجم

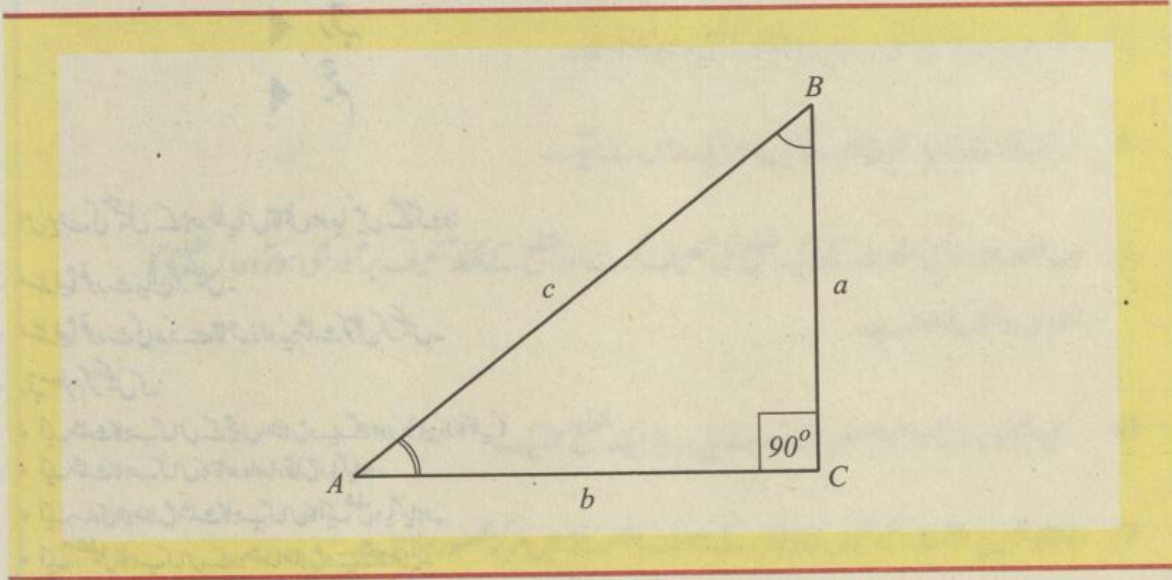
اس یونٹ کی تکمیل کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

- ◀ مسئلہ فیثاغورث بیان کر سکیں۔
- ◀ مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے قائمہ زاویہ مثلث کو حل کر سکیں۔
- ◀ رقبہ معلوم کر سکیں کہ:
- ایک مثلث کا جب کہ اس کے تینوں اضلاع دیے گئے ہوں (ہیروز کا کلیہ)
- ایک مثلث کا جب کہ اس کا قاعدہ اور ارتفاع دیا گیا ہو۔
- ایک مساوی الاضلاع مثلث کا جب کہ اس کا ایک ضلع دیا گیا ہو۔
- ایک مستطیل کا جب کہ اس کے دو متصلا اضلاع دیے گئے ہوں۔
- ایک متوازی الاضلاع کا جب کہ اس کا قاعدہ اور ارتفاع دیا گیا ہو۔
- ایک مربع کا جب کہ اس کا ایک ضلع دیا گیا ہو۔
- کمرہ کی چار دیواریوں کا جب کہ ان کی لمبائی، چوڑائی اور اونچائی دی گئی ہو۔
- ◀ ایک مربعی/مستطیلی میدان پر فرش لگانے کا خرچ معلوم کر سکیں۔
- ◀ ایک مستطیل پلاٹ کے باہر فٹ پاتھ پر دی گئی سمتوں کے حساب سے ٹائلوں کی تعداد معلوم کر سکیں۔
- ◀ دائرہ اور نصف دائرہ کا رقبہ معلوم کر سکیں جب کہ اس کا رداس دیا گیا ہو۔
- دوہم مرکز دائروں کے درمیانی علاقہ کا رقبہ معلوم کر سکیں جب کہ ان کے رداس دیے گئے ہوں۔
- ◀ مثلث، مستطیل، مربع، متوازی الاضلاع اور دائرہ کے رقبہ سے متعلق روزمرہ زندگی کے مسائل حل کر سکیں۔
- ◀ حجم معلوم کر سکیں۔
- ایک مکعب کا جب کہ اس کا ایک کنارہ دیا گیا ہو۔
- ایک مکعب نما کا جب کہ لمبائی، چوڑائی اور اونچائی دی گئی ہو۔
- ایک سیدھے دائروی سلنڈر کا جس کے قاعدہ کا رداس اور اونچائی دی گئی ہو۔
- ایک سیدھی کون (Cone) کا جس کا رداس اور اونچائی معلوم ہو۔
- ایک کرہ اور نصف کرہ کا جس کا رداس دیا گیا ہو۔
- ◀ مکعب، مکعب نما، سلنڈر، کون اور کرہ کے حجم سے متعلق روزمرہ زندگی کے مسائل حل کر سکیں۔

9.1 مسئلہ فیثاغورث PYTHAGORAS THEOREM

قائمہ الزاویہ مثلث کے وتر کا مربع، اس کے باقی اضلاع کے مربعوں کے مجموعہ کے برابر ہوتا ہے۔

$$c^2 = a^2 + b^2$$

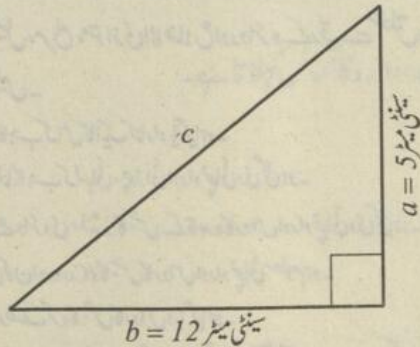


مثال 1:-

ایک قائمہ الزاویہ مثلث کے دو اضلاع 5 سینٹی میٹر اور 12 سینٹی میٹر ہیں۔ وتر کی لمبائی معلوم کریں۔

حل: چونکہ سینٹی میٹر $b = 12$ ، سینٹی میٹر $a = 5$

فرض کیا کہ وتر کی لمبائی c ہے۔ تو مسئلہ فیثاغورث کی رو سے



$$c^2 = a^2 + b^2$$

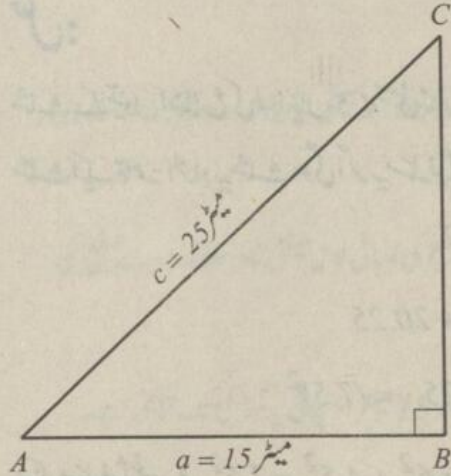
$$= (5)^2 + (12)^2$$

$$= 25 + 144 = 169$$

$$c = 13 \text{ سینٹی میٹر}$$

مثال 2:-

ایک سیڑھی جس کی لمبائی 25 میٹر ہے کو دیوار کے ساتھ اس طرح کھڑا کیا گیا ہے کہ اس کا پایہ دیوار سے 15 میٹر کے فاصلہ پر ہے۔ بتائیے سیڑھی دیوار کے ساتھ کتنی بلندی تک جاتی ہے؟



حل: چونکہ $a = 15$ میٹر، $c = 25$ میٹر

فرض کیا کہ مطلوبہ اونچائی b ہو تو

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$b^2 = c^2 - a^2$$

$$= (25)^2 - (15)^2$$

$$= 625 - 225$$

$$= 400$$

$$b = 20 \text{ میٹر}$$

مثال 3:- اگر کسی مثلث کے اضلاع 30، 72 اور 78 ہوں تو کیا یہ مثلث قائمہ الزاویہ مثلث ہے؟

حل: چونکہ $a = 30$ ، $b = 72$ ، $c = 78$

تو مسئلہ فیثاغورث کی رو سے $c^2 = a^2 + b^2$

$$R.H.S = a^2 + b^2 = (30)^2 + (72)^2$$

$$= 900 + 5184$$

$$= 6084$$

$$L.H.S = c^2 = (78)^2$$

$$= 6084$$

$$R.H.S = L.H.S$$

پس مثلث ایک قائمہ الزاویہ مثلث ہے۔

مثال 4:-

اگر مثلث کے لمبائیاں 4.5 سینٹی میٹر، 6 سینٹی میٹر اور 7.5 سینٹی میٹر ہوں تو کیا یہ ایک قائمہ الزاویہ مثلث ہوگی؟
اگر ایسا ہے تو اس میں وتر کونسا ضلع ہوگا؟

حل:

مثلث کے تینوں اضلاع کی لمبائیاں 4.5 سینٹی میٹر، 6 سینٹی میٹر اور 7.5 سینٹی میٹر دی گئی ہیں۔
مثلث ایک قائمہ الزاویہ مثلث ہوگی اگر یہ مسئلہ فیثاغورث کی شرط پر پوری اترے۔

$$6^2 + 4.5^2 = 7.5^2$$

$$(6)^2 + (4.5)^2 = 36 + 20.25$$

$$= 56.25 = (7.5)^2$$

چونکہ مسئلہ فیثاغورث $6^2 + 4.5^2 = 7.5^2$ درست ثابت ہو گیا ہے۔ لہذا یہ ایک قائمہ الزاویہ مثلث ہے۔

$$7.5^2 = 6^2 + 4.5^2 \quad \text{اور}$$

∴ پس 7.5 سینٹی میٹر لمبائی والا ضلع وتر ہے۔

مشق 9.1

1- قائمہ الزاویہ مثلث کا تیسرا ضلع معلوم کریں جبکہ a , b اس کے دو اضلاع اور c وتر ہو۔

$$(i) \quad a = 3, \quad b = 4, \quad c = ?$$

$$(ii) \quad a = 5, \quad c = 13, \quad b = ?$$

$$(iii) \quad b = 5, \quad c = 61, \quad a = ?$$

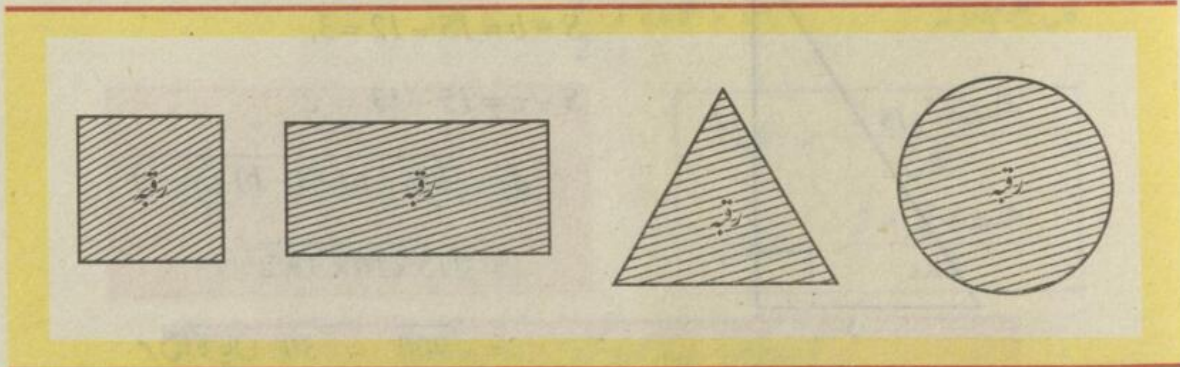
2- اگر قائمہ الزاویہ مثلث کے دو اضلاع $2ab$ اور $a^2 - b^2$ ہوں تو ثابت کیجیے کہ وتر کی لمبائی $a^2 + b^2$ ہے۔

3- اس تساوی الساقین قائمہ الزاویہ مثلث کا وتر معلوم کریں جس کے ہر ضلع کی لمبائی '1' ہو۔

- 4- اُس تساوی الساقین قائمہ الزاویہ کے وتر کی لمبائی معلوم کریں جس کے ہر ضلع کی لمبائی 8 سینٹی میٹر ہو۔
- 5- اگر درج ذیل دیے گئے نمبر مثلث کے اضلاع کی لمبائیاں ہوں تو ان میں سے کون سی قائمہ الزاویہ مثلث ہے؟
- 3, 4, 5 (i)
9, 17, 25 (ii)
11, 61, 60 (iii)
- 6- مثلث ABC میں C قائمہ زاویہ ہے۔ اگر سینٹی میٹر $m\overline{AC} = 9$ اور سینٹی میٹر $m\overline{BC} = 12$ ہو تو AB کی مقدار معلوم کریں، مسئلہ فیثاغورث استعمال کرتے ہوئے۔
- 7- قائمہ الزاویہ مثلث کا وتر 25 سینٹی میٹر ہے۔ اگر اس کے ایک ضلع کی لمبائی 24 سینٹی میٹر ہو تو دوسرے ضلع کی لمبائی معلوم کریں۔
- 8- 17 میٹر سیڑھی کو مکان کی دیوار سے لگایا جائے تو یہ دیوار پر موجود 15 میٹر اونچائی پر کھڑکی تک پہنچتی ہے۔ اس کا پایہ دیوار سے کتنا دور ہے؟
- 9- ایک قائمہ الزاویہ مثلث کے دو اضلاع برابر ہیں۔ اگر اس کے وتر کے مربع کی مقدار 50 ہو تو ہر ایک ضلع کی لمبائی معلوم کریں۔
- 10- ایک مثلث کے اضلاع کی لمبائیاں 36 سینٹی میٹر، 15 سینٹی میٹر اور 39 سینٹی میٹر ہیں۔ ثابت کیجیے کہ یہ ایک قائمہ الزاویہ مثلث ہے۔

9.2 رقبہ AREAS

کسی بند شکل کی چار دیواری میں گھری ہوئی جگہ اس کا رقبہ کہلاتی ہے۔



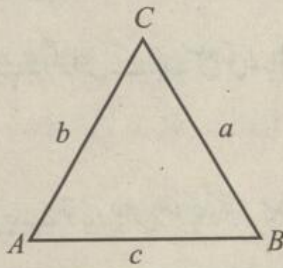
9.2.1 مثلث کا رقبہ The Area of a Triangle

مثلث کا رقبہ جب کہ اس کے تینوں اضلاع دیے گئے ہوں۔

مثلث ABC جس کے اضلاع کی لمبائیاں a, b, c ہیں اور

$$2S = a + b + c \Rightarrow S = \frac{a + b + c}{2},$$

جبکہ 'S' مثلث کے احاطہ کا نصف ہے۔



کسی عام مثلث کا رقبہ $A = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$ ہوتا ہے۔
یہ مثلث کا رقبہ معلوم کرنے کے لیے ہیروز فارمولا کہلاتا ہے۔

مثال :- مثلث جس کے اضلاع کی لمبائیاں 5، 12 اور 13 ہیں۔ اس کا رقبہ معلوم کریں۔

حل : کیونکہ $a = 5, b = 12, c = 13$

$$2S = a + b + c \quad \text{تو}$$

$$2S = 5 + 12 + 13 = 30 \Rightarrow S = 15$$

$$S - a = 15 - 5 = 10,$$

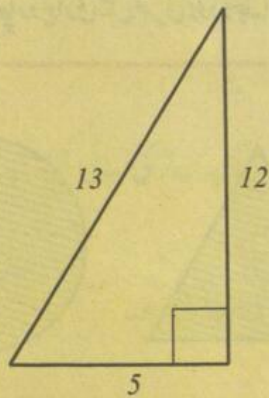
$$S - b = 15 - 12 = 3,$$

$$S - c = 15 - 13 = 2$$

$$A = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$$

$$= \sqrt{15 \times 10 \times 3 \times 2}$$

$$= \sqrt{900} = 30 \text{ مربع اکائیاں}$$



نوٹ: اس سوال میں مثلث قائمہ الزاویہ مثلث ہے جس کا قاعدہ 5 عمود 12 اور وتر 13 ہے۔

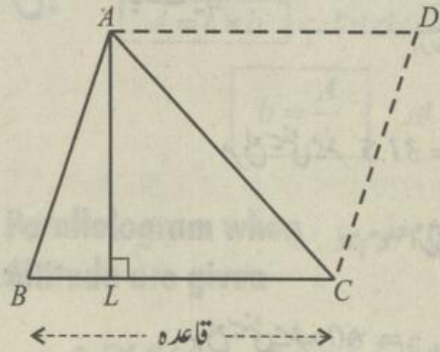
$$\text{پس رقبہ} = \frac{1}{2} (\text{قاعدہ}) \times (\text{عمود})$$

$$A = \frac{1}{2} (5) (12) = \frac{60}{2} = 30 \text{ مربع اکائیاں}$$

نوٹ: مثلث کے رقبہ کو A سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

Area of a Triangle when base and Altitude are given

مثلث کا رقبہ معلوم کرنا جبکہ اس کا قاعدہ اور عمودی بلندی معلوم ہو۔



شکل کے مطابق کوئی مثلث ABC بنائیے۔

فرض کیا $\overline{BC}$ اس کا قاعدہ ہے اور $\overline{AL} \perp \overline{BC}$

لہذا $\overline{AL}$ اس کے مطابق عمودی بلندی ہے۔

A اور C سے بالترتیب $\overline{BC}$ اور $\overline{BA}$ کے متوازی خطوط کھینچیے جو ایک دوسرے کو نقطہ D پر ملتے ہیں۔

لہذا $ABCD$ واضح طور پر ایک متوازی الاضلاع ہے جس کا قاعدہ $\overline{BC}$ اور اس کے مطابق $\overline{AL}$ عمودی بلندی ہے۔

$$\Delta ABC \text{ کا رقبہ} = \frac{1}{2} (\text{متوازی الاضلاع } ABCD \text{ کا رقبہ})$$

$$= \frac{1}{2} (b \times h) \text{ جبکہ } b \text{ قاعدہ اور } h \text{ عمودی بلندی ہے۔}$$

$$\Delta \text{ کا رقبہ} = \frac{1}{2} \times \text{قاعدہ} \times \text{عمود} \text{ پس معلوم ہوا کہ}$$

اہم بات

مثلث کا ارتفاع اس کی عمودی بلندی کو کہتے ہیں۔
جسے علامت h سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\text{قاعدہ} = \frac{2 \times \text{مثلث کا رقبہ}}{\text{ارتفاع}}$$

$$\text{ارتفاع} = \frac{2 \times \text{مثلث کا رقبہ}}{\text{قاعدہ}}$$

قاعدہ کی علامت b اور ارتفاع کی علامت h ہے۔

مثال 1:- مثلث کا ارتفاع معلوم کریں جس کا قاعدہ 16 سینٹی میٹر اور رقبہ 34 مربع سینٹی میٹر ہے۔

نوٹ

قائمہ الزاویہ مثلث میں
قائمہ زاویہ کے سامنے والا ضلع
اس کا وتر کہلاتا ہے

حل: مثلث کا رقبہ $\times 2 =$ مثلث کا ارتفاع $\times$ قاعدہ

16 سینٹی میٹر = قاعدہ، مربع سینٹی میٹر 34 = رقبہ

16 سینٹی میٹر $\times$ ارتفاع = $\frac{2 \times 34}{16} = 4.25$ سینٹی میٹر

مثال 2:- مثلثان کے رقبہ معلوم کریں جن کا

(i) 18 سینٹی میٹر = قاعدہ، 3.5 سینٹی میٹر = ارتفاع

(ii) 8 سینٹی میٹر = قاعدہ، 15 سینٹی میٹر = ارتفاع

حل: ہم جانتے ہیں

(i) ارتفاع $\times$ قاعدہ $\times \frac{1}{2} =$ مثلث کا رقبہ

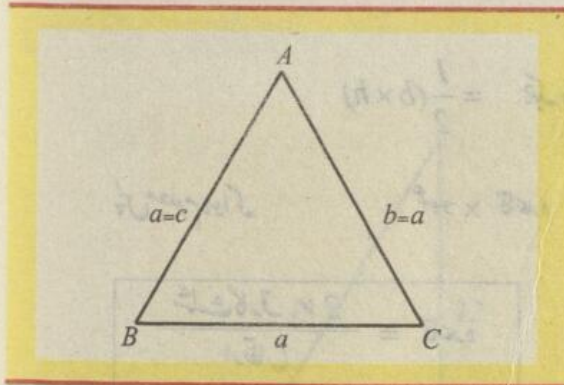
$= \frac{1}{2} \times 18 \times 3.5 = 31.5$ مربع سینٹی میٹر

(ii) ارتفاع $\times$ قاعدہ $\times \frac{1}{2} =$ مثلث کا رقبہ

$= \frac{1}{2} \times 8 \times 15 = 60$ مربع سینٹی میٹر

Area of an Equilateral Triangle when its side is given

مساوی الاضلاع مثلث کا رقبہ معلوم کرنا جس کے ضلع کی لمبائی معلوم ہو۔



مساوی الاضلاع مثلث ABC میں $a = b = c$

لہذا $S = \frac{a+a+a}{2} = \frac{3a}{2}$

$S - a = \frac{a}{2}, S - b = \frac{a}{2},$

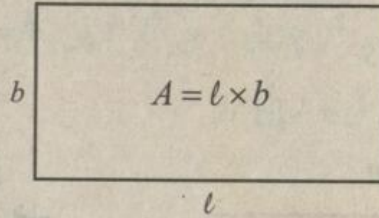
$S - c = \frac{a}{2}$

$\Delta = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)} = \sqrt{\frac{3a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3} a^2}{4}$

مساوی الاضلاع مثلث، ABC کا رقبہ $\frac{\sqrt{3} a^2}{4}$ ہوتا ہے

Area Of A Rectangle When Its Two Sides Are Given

مستطیل کا رقبہ معلوم کرنا جبکہ دو اضلاع معلوم ہوں
شکل میں دی گئی مستطیل کو لیجیے۔



$$\text{مستطیل کی لمبائی} = l$$

$$\text{مستطیل کی چوڑائی} = b$$

مستطیل کا رقبہ، مستطیل کی لمبائی اور چوڑائی کے حاصل ضرب کے برابر ہوتا ہے

$$A = l \times b$$

$$b = \frac{A}{l}$$

اور

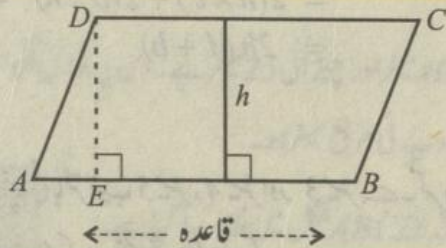
$$l = \frac{A}{b}$$

پس

Area of a Parallelogram when base and Altitude are given

متوازی الاضلاع کا رقبہ معلوم کرنا جبکہ اس کا قاعدہ اور ارتفاع معلوم ہو

متوازی الاضلاع کا رقبہ، اس کے قاعدہ اور قاعدہ پر گرائے گئے ارتفاع کے حاصل ضرب کے برابر ہوتا ہے۔



$$\text{ارتفاع} \times \text{قاعدہ} = A = \text{متوازی الاضلاع کا رقبہ}$$

$$A = b \times h$$

$$\text{قاعدہ} = b = \frac{A}{h}$$

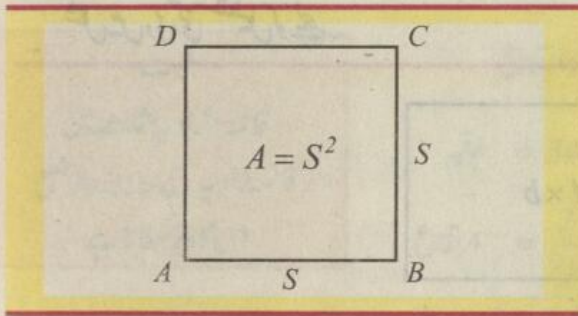
$$\text{ارتفاع} = h = \frac{A}{b}$$

اہم بات

مثلث کا رقبہ

$$A = \frac{1}{2} \times \text{قاعدہ} \times \text{ارتفاع}$$

مربع کا رقبہ معلوم کرنا جبکہ اس کا ضلع معلوم ہو: Area of a Square when its side is given



مربع ABCD کا رقبہ اس کے ضلع پر مربع کے برابر ہوتا ہے۔

$$A = \text{ضلع} \times \text{ضلع}$$

$$= S \times S = S^2$$

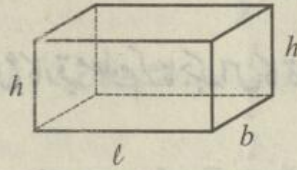
$$A = S^2$$

$$\text{ضلع} = S = \sqrt{A}$$

رقبہ کی پیمائش کی اکائیاں مربع سینٹی میٹر، مربع میٹر اور مربع کلومیٹر ہیں۔

کمرہ کی چار دیواریوں کا رقبہ Area of Four Walls of a Room

ہم کمرہ کی چار دیواریوں کا رقبہ معلوم کر سکتے ہیں جبکہ اس کی لمبائی، چوڑائی اور اونچائی معلوم ہو۔



فرض کیا کمرہ کی لمبائی = l

کمرہ کی چوڑائی = b

کمرہ کی اونچائی = h

$$\begin{aligned} \text{چار دیواریوں کا رقبہ} &= h \times l + b \times h + h \times l + b \times h \\ &= 2(h \times l) + 2(b \times h) = 2(h \times l + b \times h) \\ &= 2h(l + b) \end{aligned}$$

مثال:-

کمرہ کی لمبائی، چوڑائی اور اونچائی بالترتیب 5 میٹر، 4 میٹر اور 3 میٹر ہے۔ کمرہ کی دیواریوں پر 7.50 روپے فی مربع میٹر سفیدی کرانے کا خرچ معلوم کریں۔

حل:

چونکہ $h = 3$ میٹر، $b = 4$ میٹر، $l = 5$ میٹر

$$\text{چار دیواریوں کا رقبہ} = 2(l + b) \times h = 2(5 + 4) \times 3$$

$$= 18 \times 3 = 54 \text{ مربع میٹر پس}$$

7.50 روپے فی مربع میٹر سفیدی کرانے کا خرچ

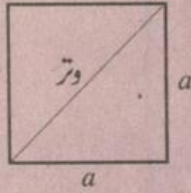
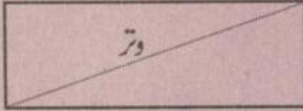
$$= 7.5 \times 54 = 405 \text{ روپے}$$

یاد رکھنے کی باتیں:

1- مستطیل کا رقبہ = (لمبائی × چوڑائی)

2- مستطیل کے وتر کی لمبائی = $\sqrt{(\text{لمبائی})^2 + (\text{چوڑائی})^2}$

3- مستطیل کا احاطہ = $2(\text{لمبائی} + \text{چوڑائی})$



4- مربع کا رقبہ = a^2

جبکہ مربع کا ضلع = a

5- مربع کے وتر کی لمبائی = $\sqrt{2}a$

6- مربع کا رقبہ = $\frac{1}{2}(\text{وتر})^2$

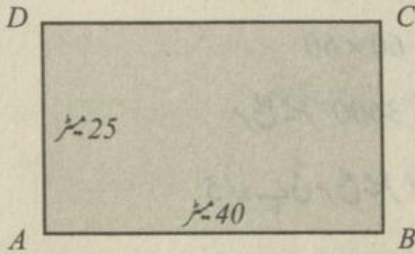
7- مربع کا احاطہ = $4 \times \text{ضلع}$

9.2.2 مستطیلی اور مربعی علاقوں کا رقبہ Areas of Rectangular and Square Fields

اندر یا باہر ہمارے ارد گرد عموماً مستطیلی راستے یا میدان ہوتے ہیں۔ ہم ان کے رقبے کا طریقہ کچھ مثالوں سے واضح کرتے ہیں۔

مثال 1:-

ایک مستطیلی علاقے کی لمبائی 40 میٹر اور چوڑائی 25 میٹر ہے۔ اس پر گھاس لگوانے کا خرچ معلوم کریں، اگر گھاس لگوانے کا خرچ 16 روپے فی مربع میٹر ہو۔



حل: فرض کیا دیا گیا علاقہ ABCD شکل میں ظاہر کیا گیا ہے۔

مستطیلی علاقے کی لمبائی = 40 میٹر

مستطیلی علاقے کی چوڑائی = 25 میٹر

مستطیلی علاقے کا رقبہ = $A = l \times b$

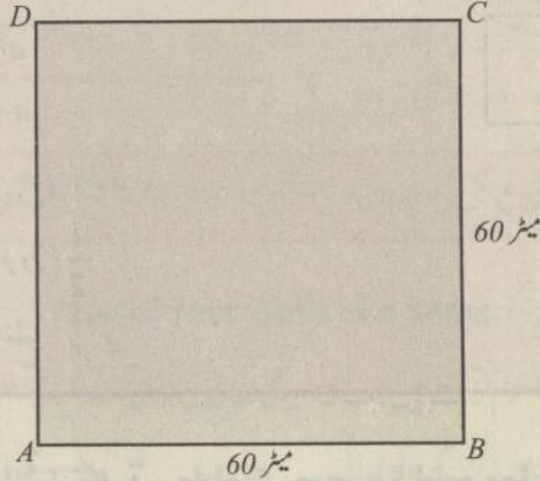
= $40 \times 25 = 1000$ مربع میٹر

16 روپے فی مربع میٹر = گھاس لگوانے کا خرچ

روپے کل خرچ = $16 \times 1000 = 16000$

مثال 2:-

مربعی میدان جس کے ہر ضلع کی لمبائی 60 میٹر ہے۔ اس میدان کا رقبہ معلوم کیجیے اور اس پر 5 روپے فی مربع میٹر گھاس لگوانے کا خرچ معلوم کریں۔



حل:

فرض کیا مطلوبہ مربعی میدان ABCD شکل میں دکھایا گیا ہے۔

$$\text{مربعی علاقہ کے ضلع کی لمبائی} = 60 \text{ میٹر}$$

$$\text{مربع کا رقبہ} = A = \text{ضلع} \times \text{ضلع}$$

$$= 60 \times 60$$

$$= 3600 \text{ مربع میٹر}$$

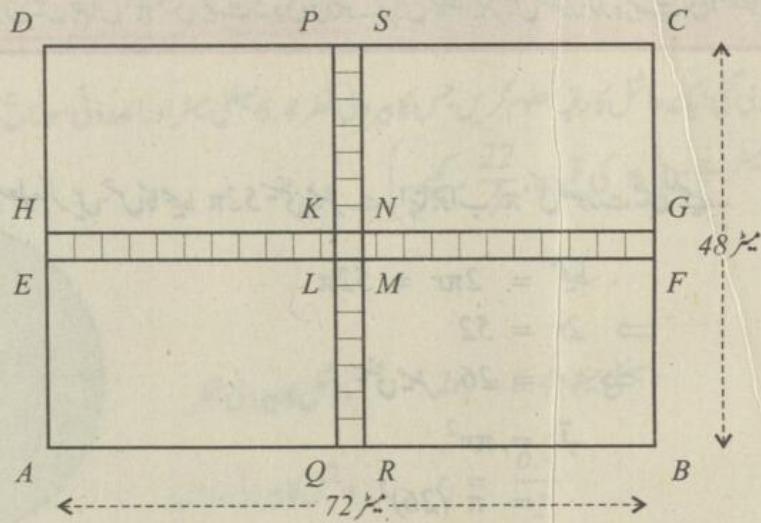
$$\text{مربعی علاقے پر گھاس لگوانے کا ریٹ} = 5 \text{ روپے فی مربع میٹر}$$

$$\therefore \text{مربعی علاقے پر گھاس لگوانے کا خرچ} = 3600 \times 5$$

$$= 18000 \text{ روپے}$$

مثال 3:-

ایک پارک جس کی لمبائی 72 میٹر اور چوڑائی 48 میٹر ہے۔ جس کے وسط میں 2 میٹر چوڑی دو سڑکیں ایک دوسرے پر عموداً اور پارک کے اضلاع کے متوازی گزرتی ہیں۔ ان سڑکوں کا رقبہ معلوم کریں اور ان راستوں کو خوبصورت بنانے کے لیے 4 مربع میٹر رقبہ کی کتنی ٹائلیں درکار ہوں گی؟



حل:

شکل میں ABCD مستطیلی علاقہ پارک کو ظاہر کرتا ہے۔ جبکہ مستطیل PQRS اور مستطیل EFGH سڑکوں کو ظاہر کرتی ہے۔

$$\text{سڑکوں کا رقبہ} = \text{PQRS کا رقبہ} + \text{EFGH کا رقبہ} - \text{KLMN کا رقبہ}$$

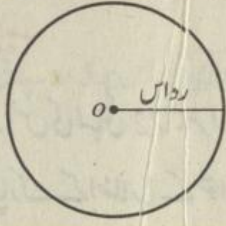
$$= [(48 \times 2) + (72 \times 2) - (2 \times 2)] \text{ مربع میٹر}$$

$$= (96 + 144 - 4) \text{ مربع میٹر}$$

$$= 236 \text{ مربع میٹر}$$

$$\text{ٹائلوں کی تعداد} = \frac{236}{4} = 59 \text{ ٹائلیں}$$

پس



9.2.4 دائرے کا رقبہ Area of a Circle

$$2\pi r = \text{دائرے کا محیط}$$

جبکہ دائرے کا رداس 'r' ہے۔

$$\pi r^2 = \text{دائرے کا رقبہ}$$

نوٹ:

مثالوں اور مشقوں میں جہاں 'π' کی قیمت نہ دی گئی ہو۔ وہاں کیلکولیٹر میں سٹور شدہ قیمت ہی استعمال کریں۔

مثال:-

اس دائرہ کا رقبہ معلوم کریں جس کا محیط 52π سینٹی میٹر ہے۔ اپنا جواب 'π' کی صورت میں لکھیے۔

حل:

$$2\pi r = 52\pi$$

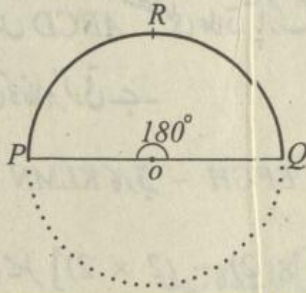
$$\Rightarrow 2r = 52$$

$$\Rightarrow r = 26 \text{ سینٹی میٹر}$$

$$\text{رقبہ} = \pi r^2$$

$$= \pi (26)^2$$

$$= 676\pi \text{ مربع سینٹی میٹر}$$



شکل میں

نصف دائرہ کا رقبہ Area of a Semicircle

نصف دائرہ، دائرہ کا آدھا یا نصف ہوتا ہے۔

جو کہ قطر اور دائرہ کے آدھے محیط پر مشتمل ہوتا ہے۔

دائرہ کا سیکٹر جس کا مرکزی زاویہ 180° ہو،

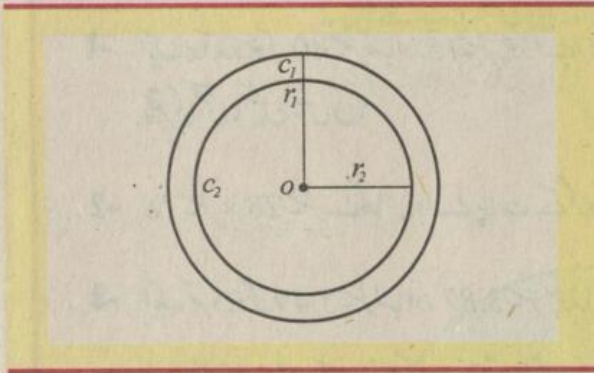
بھی نصف دائرہ کہلاتا ہے۔

$$\text{محیط } PQ = \frac{1}{2} \text{ قوس کی لمبائی}$$

$$\text{سیکٹر کا رقبہ } PRQ = \frac{1}{2} (\text{دائرہ کا رقبہ})$$

$$\text{نصف دائرہ کا رقبہ} = \frac{1}{2} (\pi r^2)$$

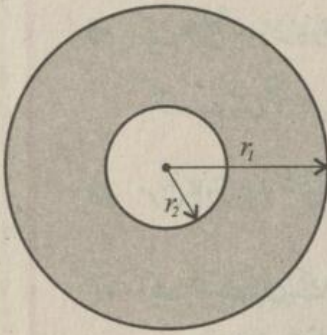
9.2.5 ہم مرکز دائروں کے رقبے Area of Concentric Circles



دائرے جن کے رداس مختلف لیکن مرکز ایک ہی نقطہ ہو،
ہم مرکز دائرے کہلاتے ہیں۔ شکل میں C_1, C_2
دو ہم مرکز دائرے جن کا مرکز O ہے اور رداس
مختلف r_1 اور r_2 ہیں۔

مثال :-

شکل میں دی گئی ایک واشل کا رقبہ معلوم کریں جس کا بیرونی قطر 6.4 سینٹی میٹر اور اندرونی سوراخ کا قطر 3.6 سینٹی میٹر ہے۔ (π کی قیمت $\frac{22}{7}$ رکھیے۔)



حل:

واشل کا بیرونی قطر $2r_1 = 6.4$ سینٹی میٹر

واشل کا بیرونی رداس $r_1 = \frac{6.4}{2}$

سینٹی میٹر $r_1 = 3.2$

سینٹی میٹر $r_2 = \frac{3.6}{2} = 1.8$ = واشل کے اندرونی سوراخ کا رداس

واشل کا رقبہ $= \pi r_1^2 - \pi r_2^2$

$= \pi (3.2)^2 - \pi (1.8)^2$ مربع سینٹی میٹر

$= \pi [(3.2)^2 - (1.8)^2]$ مربع سینٹی میٹر

$= \pi (10.24 - 3.24)$ مربع سینٹی میٹر

$= (\pi \times 7)$ مربع سینٹی میٹر

$= \frac{22}{7} \times 7 = 22$ مربع سینٹی میٹر

مشق 9.2

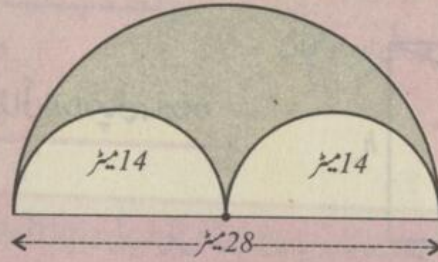
- 1- ایک برآمدہ جو کہ 40 میٹر لمبا اور 15 میٹر چوڑا ہے اس کے فرش پر 5 میٹر $\times$ 6 میٹر کے سائز میں پتھر کی کتنی ٹائلیں لگیں گی؟
- 2- 18 میٹر $\times$ 28 میٹر کے گھاس والے پلاٹ کے گرد 1 میٹر چوڑے راستے پر 40 مربع سینٹی میٹر کی کتنی ٹائلیں لگیں گی؟
- 3- ایک کمرہ جو کہ 5.49 میٹر لمبا اور 3.87 میٹر چوڑا ہے کا رقبہ معلوم کریں۔ اس کمرہ میں بحساب 10.50 روپے فی مربع میٹر قالین بچھانے کا کتنا خرچ آئے گا؟
- 4- ایک چاول کے کھیت کا رقبہ 2.5 ہیکٹر ہے۔ جبکہ اس کے اضلاع میں 3:2 کی نسبت ہے کھیت کا احاطہ معلوم کریں۔
- 5- ایک مربع گراؤنڈ کا رقبہ 4500 مربع میٹر ہے۔ ایک آدمی کو 3 کلو میٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے اس کے وتر کے راستے گزرنے میں کتنی دیر لگے گی؟
- 6- مربع کا وتر 14 سینٹی میٹر لمبا ہے۔ اس کا رقبہ معلوم کریں۔
- 7- ایک مثلث جس کے اضلاع دیے گئے ہیں، اس کا رقبہ معلوم کریں۔
(i) 120 سینٹی میٹر، 150 سینٹی میٹر اور 200 سینٹی میٹر
(ii) 50 ڈیسی میٹر، 78 ڈیسی میٹر اور 112 ڈیسی میٹر
- 8- ایک مثلثی علاقے کا احاطہ 540 میٹر ہے اور اس کے اضلاع میں 25:17:12 کی نسبت ہے۔ مثلث کا رقبہ معلوم کریں۔
اشارہ: فرض کیا اضلاع $25x$ ، $17x$ ، $12x$ ہوں تو
$$25x + 17x + 12x = 540 \Rightarrow 54x = 540 \Rightarrow x = 10$$

لہذا اضلاع کی مقداریں 120 میٹر، 170 میٹر اور 250 میٹر
- 9- ایک متوازی الاضلاع کا رقبہ معلوم کریں جس کے دو متصلہ اضلاع 12 سینٹی میٹر اور 14 سینٹی میٹر ہیں اور اس کے وتر کی لمبائی 18 سینٹی میٹر ہے۔
اشارے: فرض کیا ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے جس میں سینٹی میٹر $m\overline{AB} = 12$ ،
سینٹی میٹر $m\overline{BC} = 14$ اور سینٹی میٹر $m\overline{AC} = 18$ ΔABC کا رقبہ معلوم کیجیے۔
(ΔABC کا رقبہ) $= 2$ متوازی الاضلاع کا رقبہ

10- نیچے دی گئی واشلوں کا رقبہ معلوم کریں جس کے اندرونی اور بیرونی قطر دیے گئے ہیں۔

- (i) 15 سینٹی میٹر اور 13 سینٹی میٹر
(ii) 0.9 میٹر اور 1.2 میٹر
(iii) 40 ملی میٹر اور 33 ملی میٹر

11- سایہ دار حصہ کا رقبہ معلوم کریں۔



12- مساوی الاضلاع مثلث جس کا ضلع 8 میٹر ہے، کا رقبہ معلوم کریں۔

13- مساوی الاضلاع مثلث کا ضلع 6 سینٹی میٹر ہے۔ اس کا رقبہ معلوم کریں۔

14- قائمہ الزاویہ مثلث کا رقبہ معلوم کریں جس کے دو اضلاع 12 سینٹی میٹر اور 35 سینٹی میٹر ہیں۔

15- ایک مستطیل کا قاعدہ اس کے ارتفاع کا تین گنا ہے جبکہ اس کا رقبہ 147 مربع سینٹی میٹر ہے۔
قاعدہ اور ارتفاع معلوم کریں۔

16- اس متوازی الاضلاع کا قاعدہ معلوم کریں جس کے ارتفاع کی لمبائی 18 سینٹی میٹر اور رقبہ 3 مربع میٹر ہے۔

17- ایک متوازی الاضلاع کا رقبہ 144 مربع سینٹی میٹر ہے۔ اس کا ارتفاع معلوم کریں اگر اس کے قاعدہ کی لمبائی 2 سینٹی میٹر ہو۔

18- اس مستطیل کا رقبہ معلوم کریں جس کی لمبائی 2 میٹر اور چوڑائی 18 سینٹی میٹر ہے۔

19- ایک مساوی الاضلاع مثلث کا رقبہ $4\sqrt{3}$ مربع سینٹی میٹر ہے۔ اس کے ضلع کی لمبائی معلوم کریں۔

9.3 حجم VOLUMES

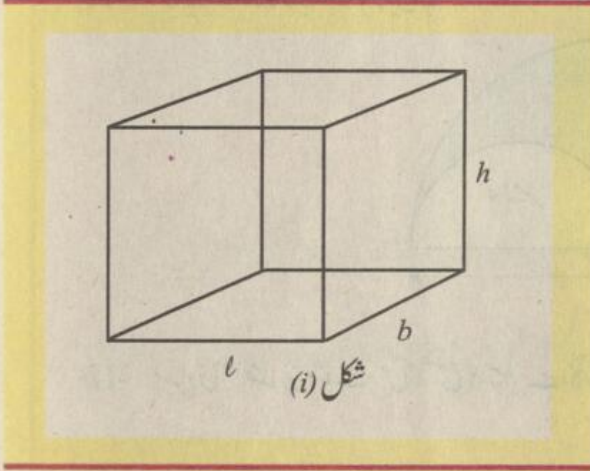
اس عنوان کے تحت ایسی اشکال کا مطالعہ کریں گے جو کہ مستوی سطح نہیں ہوتیں۔ اس کی سادہ ترین شکل مکعب یا مکعب نما ہے۔ یہ اشکال مکمل طور پر مستوی میں واقع نہیں ہوتیں۔ یہ اشکال ٹھوس (تین پہلو والی) کہلاتی ہیں۔

مکعب، مکعب نما Cube and Cuboid

مکعب: Cube

ایک 6 پہلو شکل جس کی لمبائی چوڑائی اور اونچائی برابر ہو، مکعب کہلاتی ہے۔

دی گئی شکل مکعب کی ہے۔



$$\text{مکعب کی لمبائی} = l$$

$$\text{مکعب کی چوڑائی} = b$$

$$\text{مکعب کی اونچائی} = h$$

$$l = b = h \text{ جبکہ}$$

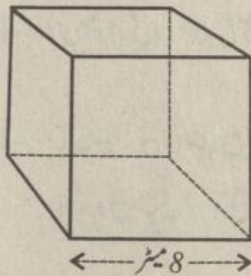
$$\text{مکعب کا حجم} = V = l \times l \times l$$

$$\text{یا مکعب اکائیاں} = V = l^3$$

لہذا

مثال:-

ایسے مکعب کا حجم معلوم کریں جس کا ہر کنارہ 8 میٹر ہو۔



حل:

$$\text{مکعب کا کنارہ} = 8 \text{ میٹر}$$

$$\text{حجم} = l^3$$

$$V = 8 \times 8 \times 8 = 8^3$$

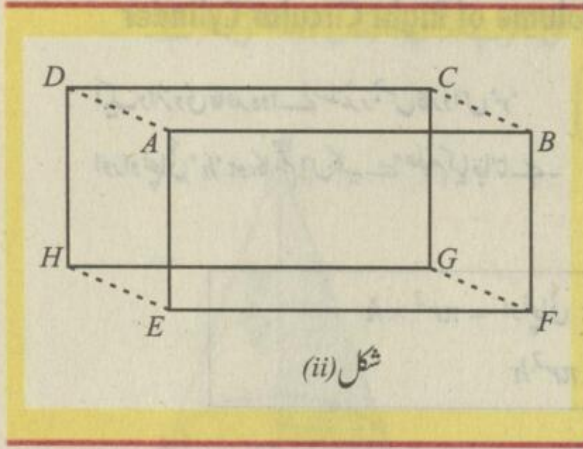
$$V = 512 \text{ مکعب میٹر}$$

اطراف: لمبائی کی ایک طرف ہوتی ہے۔

رقبہ کی دو اطراف ہوتی ہیں۔

حجم کی تین اطراف ہوتی ہیں۔

مکعب نما Cuboid



ایک چھ پہلو شکل جس کی لمبائی، چوڑائی اور اونچائی ہو، مکعب نما کہلاتی ہے۔ (یا مستطیلی متوازی الاضلاعی پائپ نما) شکل (ii) مکعب نما کو ظاہر کرتی ہے۔

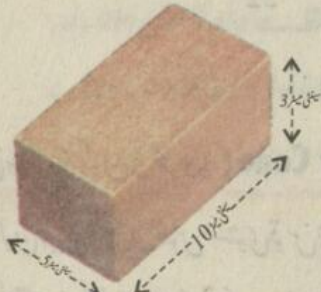
مکعب نما کی لمبائی چوڑائی اور اونچائی کو بالترتیب b , l اور h سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ لمبائی، چوڑائی اور اونچائی مکعب نما کی اطراف بھی کہلاتی ہیں۔

ایک مکعب نما کا حجم V سے ظاہر کیا جاتا ہے جس کی لمبائی l ، چوڑائی b اور اونچائی h ہو۔

$$V = l \times b \times h$$

مثال:-

لکڑی کے بلاک کا حجم معلوم کریں جس کی لمبائی، چوڑائی اور اونچائی بالترتیب 10 سینٹی میٹر، 5 سینٹی میٹر اور 3 سینٹی میٹر ہیں۔



حل:

دیا گیا ہے

لکڑی کے بلاک کی لمبائی = 10 سینٹی میٹر
لکڑی کے بلاک کی چوڑائی = 5 سینٹی میٹر
لکڑی کے بلاک کی اونچائی = 3 سینٹی میٹر

$$\begin{aligned} V &= l \times b \times h \\ &= 10 \times 5 \times 3 \\ &= 150 \text{ سینٹی میٹر} \end{aligned}$$

مکعب اور مکعب نما کا حجم:

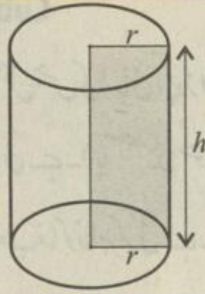
1- لمبائی، چوڑائی اور اونچائی ایک ہی اکائی میں ہونے چاہئیں۔

2- درج بالا کلیہ سے ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ

$$l = \frac{v}{b \times h}$$

$$b = \frac{v}{l \times h}$$

$$h = \frac{v}{l \times b}$$



ایک عمودی دائروی سلنڈر کا حجم Volume of Right Circular Cylinder

ایک دائروی قاعدہ والے سلنڈر جس کا رداس 'r' اور اونچائی 'h' ہو، کا حجم اس کلیہ سے معلوم کیا جاتا ہے۔

$$\text{سلنڈر کا حجم} = \pi r^2 \times h$$

$$\text{حجم} = \pi r^2 h$$

مثال :-

سلنڈر کا حجم 12320 مکعب سینٹی میٹر اور اونچائی 20 سینٹی میٹر ہے، سلنڈر کا رداس معلوم کریں۔

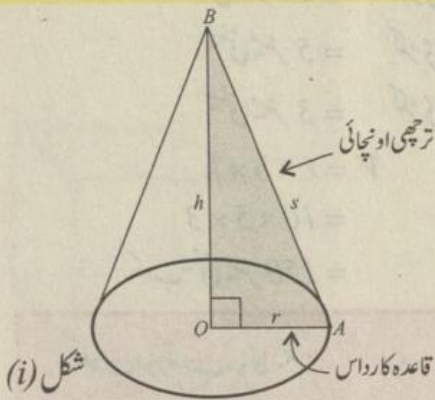
حل: دیا گیا ہے $r = ?$ سینٹی میٹر $h = 20$ مکعب سینٹی میٹر $v = 12320$

$$v = \pi \times r^2 \times h \Rightarrow r^2 = \frac{v}{\pi h}$$

$$r^2 = \frac{12320}{\frac{22}{7} \times 20} = \frac{12320 \times 7}{22 \times 20} = \frac{616 \times 7}{22} = 196$$

$$r = 14 \text{ سینٹی میٹر}$$

عمودی دائروی کون (مخروط) Right Circular Cone



کون Cone ایک ٹھوس مستوی قوس نما سطح ہوتی ہے جس کو قاعدہ کہتے ہیں اور مستوی سے اوپر ایک کونا جس کو کون کا راس کہتے ہیں نکلا ہوتا ہے۔ ایک عمودی دائروی کون، ایک قائمہ الزاویہ مثلث BOA (شکل (i)) میں دکھایا گیا ہے کو $\overline{OB}$ کے گرد گھما کر حاصل کیا جاتا ہے۔ کون کا قاعدہ ایک دائرہ جس کا رداس OA بنتا ہے۔ B کون کا راس ہے اور $\overline{BA}$ ترچھا ضلع ہے۔

$$\text{ارتفاع} \times \text{قاعدہ کا رقبہ} \times \frac{1}{3} = \text{کون کا حجم}$$

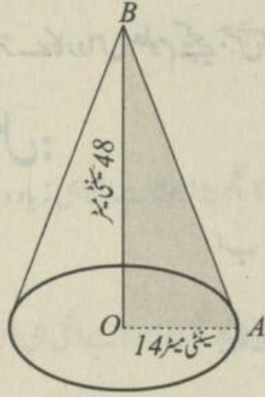
$$v = \frac{1}{3} \pi r^2 \times h$$

مثال :-

ایک مخروط (کون) جس کے دائروی قاعدہ کا رداس 14 سینٹی میٹر ہے اور اس کا ارتفاع 48 سینٹی میٹر ہے۔

مخروط کا حجم معلوم کیجیے۔ (π کی قیمت $\frac{22}{7}$ لیجیے۔)

حل: دیا گیا ہے کہ



$$\text{سینٹی میٹر } r = 14 = \text{قاعدہ کا رداس}$$

$$\text{سینٹی میٹر } h = 48 = \text{مخروط کا ارتفاع}$$

$$\text{مخروط کا حجم} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

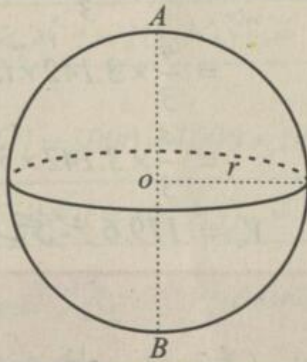
$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (14)^2 \times 48$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 196 \times 48$$

$$= 9856 \text{ مکعب سینٹی میٹر}$$

کرہ Sphere

کرہ ایک سطح سے گھرا ہوا ایسا جسم ہوتا ہے جس پر ہر نقطہ اس کے اندر ایک معین نقطہ سے برابر فاصلہ پر ہوتا ہے۔
معین نقطہ کو کرہ کا مرکز کہتے ہیں۔ معین نقطہ (مرکز) سے کرہ کی سطح پر موجود نقاط کا فاصلہ کرے کا رداس کہلاتا ہے جسے عموماً 'r' سے ظاہر کیا جاتا ہے۔



$$\text{کرے کا حجم} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 \text{ جبکہ } r \text{ کرے کا رداس کہلاتا ہے۔}$$

Hemisphere نصف کرہ

اگر کڑے کو دو برابر حصوں میں تقسیم کیا جائے تو ہر حصہ نصف کرہ کہلاتا ہے۔

مثال 1:-

کڑے کا رداس معلوم کیجیے جس کا حجم 850 مکعب میٹر ہے۔ جبکہ π کی قیمت $\frac{22}{7}$ ہے۔

حل:

$$\text{کڑے کا حجم} = 850 \text{ مکعب میٹر}$$

$$\text{رداس} = ?$$

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

اب

$$r^3 = \frac{3V}{4\pi}$$

چونکہ

$$\Rightarrow r^3 = \frac{3 \times 850 \times 7}{4 \times 22}$$

$$\Rightarrow r^3 = 202.8409$$

$$\Rightarrow r = (202.8409)^{\frac{1}{3}}$$

$$= 5.88 \text{ میٹر}$$

مثال 2:-

کڑے کا حجم معلوم کریں جس کا رداس 3.5 سینٹی میٹر ہے۔

حل:

$$\text{کڑے کا رداس} = r = 3.5 \text{ سینٹی میٹر}$$

$$\text{کڑے کا حجم} = V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$= \frac{4}{3} \times 3.142 \times (3.5)^3$$

$$= \frac{4}{3} \times 3.142 \times 3.5 \times 3.5 \times 3.5$$

$$V = 179.6 \text{ مکعب سینٹی میٹر}$$

حجم کی کچھ معیاری اکائیاں:

اگر ہم 1 سینٹی میٹر، 1 ملی میٹر یا 1 میٹر ضلع والے مکعب کو حجم کی پیمائش کرنے کے لیے معیار مقرر کریں

تو حجم کی اکائیاں ہوں گی

مکعب سینٹی میٹر

مکعب ملی میٹر

مکعب میٹر

Real Life Problems Related to Volume

حجم کے متعلقہ روزمرہ زندگی سے مسائل
ایک ٹھوس شے کی جسامت کی مقدار کی پیمائش ہوتی ہے۔ ٹھوس شے کی جسامت کی اس مقدار کو حجم کہتے ہیں۔
دوسرے لفظوں میں اس جگہ شے یا خلا کی پیمائش جو ٹھوس جسم گھیرتا ہے، اس کا حجم کہلاتی ہے۔
مثال کے طور پر حقیقی زندگی کے متعلقہ مسائل کو لیتے ہیں۔

1. ایک مکعب نما اونچا پانی جمع کرنے کے لیے ٹینک بنایا جاتا ہے۔ جتنا اس کا حجم بڑا ہوتا ہے اتنا ہی زیادہ پانی اس میں جمع کیا جاسکتا ہے۔
2. ایک مکعب نمائین کا ڈبہ تیل جمع کرنے کے لیے بنایا جاتا ہے۔ جتنا اس مکعب نما کا حجم بڑا ہوتا ہے اتنی ہی اس میں تیل جمع کرنے کی صلاحیت زیادہ ہوتی ہے۔

یاد رکھیے کہ:

1- چونکہ
لہذا
مکعب ملی میٹر $1 = 10 \times 10 \times 10$ مکعب سینٹی میٹر
مکعب ملی میٹر $1 = 1000$ مکعب سینٹی میٹر

2- مکعب سینٹی میٹر $1 = 100 \times 100 \times 100$ مکعب میٹر
مکعب سینٹی میٹر $= 1000000$

یا
مکعب سینٹی میٹر $1 = 10^6$ مکعب میٹر

مکعب ملی میٹر $1 = 1000 \times 1000 \times 1000$ مکعب میٹر

مکعب ملی میٹر $1 = 10^9$ مکعب میٹر

3- مائعات کا حجم ماپنے کے لیے ہم اکائیاں لٹر (l) یا ملی لٹر (ml) استعمال کرتے ہیں۔

ملی لٹر $1 = 1$ مکعب سینٹی میٹر

اور
لٹر $1 = 1000$ مکعب سینٹی میٹر

لٹر $1000 =$ مکعب سینٹی میٹر 1000000 مکعب میٹر 1

(1 کلو لٹر) $1 = 1kl$ مکعب میٹر

مثال 1:-

ایک ٹینک جس کی لمبائی، چوڑائی اور گہرائی بالترتیب 6.3 میٹر، 4.5 میٹر اور 3.6 میٹر ہے، کا حجم (گنجائش) لٹر میں معلوم کریں۔

حل:

$$\text{ٹینک کی لمبائی} = 6.3 \text{ میٹر}$$

$$\text{ٹینک کی چوڑائی} = 4.5 \text{ میٹر}$$

$$\text{ٹینک کی گہرائی} = 3.6 \text{ میٹر}$$

$$\text{ٹینک کا حجم} = \ell \times b \times h = 6.3 \times 4.5 \times 3.6$$

$$= 102.06 \text{ مکعب میٹر}$$

$$\text{ٹینک کا حجم} = 102.06 \times 100 \times 100 \times 100$$

$$= 102060000 \text{ مکعب سینٹی میٹر}$$

$$(1 \text{ لٹر} = 1000 \text{ مکعب سینٹی میٹر} \therefore) \text{ لٹر} = 102060$$

مثال 2:-

ایک ٹینک کی گنجائش 60 کلو لٹر ہے۔ اگر ٹینک کی لمبائی اور چوڑائی بالترتیب 5 میٹر اور 4 میٹر ہو تو اس کی گہرائی معلوم کریں۔

حل:

$$\text{ٹینک کا حجم} = 60 \text{ کلو لٹر} = 60000 \text{ لٹر} = 60 \text{ مکعب میٹر}$$

$$\text{ٹینک کی لمبائی} = 5 \text{ میٹر}$$

$$\text{ٹینک کی چوڑائی} = 4 \text{ میٹر}$$

$$\text{ٹینک کی گہرائی} = d \text{ اب}$$

$$\text{حجم} = \text{گہرائی} \times \text{چوڑائی} \times \text{لمبائی}$$

$$\text{ٹینک کی گہرائی} = \frac{\text{حجم}}{\text{چوڑائی} \times \text{لمبائی}}$$

$$= \frac{60}{20} \text{ (مکعب میٹر} = 60 \text{ لٹر} \therefore 60000)$$

$$= 3 \text{ میٹر}$$

مشق 9.3

ٹھوس اجسام کے حجم معلوم کریں۔

- 1- ایک مکعب جس کا ضلع (کنارا) 4 سینٹی میٹر ہو۔
- 2- ایک مکعب جس کا کل سطحی رقبہ 96 مربع سینٹی میٹر ہو۔
- 3- ایک مکعب نما ڈبہ جس کی لمبائی 4 میٹر، چوڑائی 3 میٹر اور اونچائی 2 میٹر ہو۔
- 4- ایک عمودی سلنڈر کا، جس کے قاعدہ کا رداس 4 سینٹی میٹر اور ارتفاع 10 سینٹی میٹر ہو۔ π کی قیمت $\frac{22}{7}$ لیجیے۔
- 5- ایک دائروی مخروط (کون) کا، جس کے قاعدہ کا رداس 3 سینٹی میٹر اور ارتفاع 10 سینٹی میٹر ہو۔
- 6- ایک کرہ کا، جس کا رداس 3 سینٹی میٹر ہو۔
- 7- ایک سلنڈر کا، جس کے قاعدہ کا محیط 4 سینٹی میٹر اور لمبائی 1 میٹر ہو۔
- 8- ایک مخروط کا، جس کی بلندی 9 سینٹی میٹر اور قاعدہ کا رداس 6 سینٹی میٹر ہو۔

جائزہ مشق 9-

I- صحیح جوابات پر دائرہ لگائیے۔

1. اگر کسی قائمہ الزاویہ مثلث کے وتر کا مربع اس کے باقی دو اضلاع کے مربع کے مجموعہ کے برابر ہو تو یہ کہلاتا ہے:

- | | |
|------------------------|---------------------------|
| (a) مسئلہ فیثاغورث | (b) غیر مساوی اضلاعی مثلث |
| (c) مساوی الاضلاع مثلث | (d) متساوی الساقین مثلث |

2. ایسی مثلث جس کے تینوں اضلاع کی مقداریں معلوم ہوں اس کے رقبہ کی مقدار ہوتی ہے:

- | | |
|-------------------------------|-----------------------|
| (a) $\frac{1}{2}bh$ | (b) bh |
| (c) $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ | (d) $\frac{a+b+c}{2}$ |

3. مساوی الاضلاع مثلث جس کا ضلع 'a' ہو، کا رقبہ ہوتا ہے:

- | | | | |
|---------------------|----------|-----------------------------|-----------------------------|
| (a) $\frac{1}{2}bh$ | (b) bh | (c) $\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$ | (d) $\frac{\sqrt{3}a^2}{2}$ |
|---------------------|----------|-----------------------------|-----------------------------|

جائزہ مشق-9

4. مستطیل کا رقبہ ہوتا ہے:

(a) $l \times b$

(b) $\frac{l}{2} \times l + b$

(c) $\frac{l}{3} \times l + b$

(d) l^2

5. ایسا مربع جس کا ضلع 'S' ہو، کا رقبہ ہوتا ہے:

(a) S

(b) $4S$

(c) $2S$

(d) S^2

6. دائرہ جس کا رداس 'r' ہے، کا رقبہ ہوتا ہے:

(a) r^2

(b) $2\pi r$

(c) πr^2

(d) $\pi^2 r$

7. نصف دائرہ کا رقبہ ہوتا ہے:

(a) $\frac{\pi r^2}{2}$

(b) πr^2

(c) $\pi^2 r$

(d) $2\pi r$

8. ایک مکعب کا حجم جس کا کنارہ 'l' ہو:

(a) l^2

(b) $3l$

(c) l^3

(d) l^4

9. ایک عمودی دائروں سلنڈر کا حجم ہوتا ہے:

(a) $\frac{\pi r^2 h}{3}$

(b) $\frac{\pi r^2 h}{2}$

(c) $\pi r^2 h$

(d) $\frac{4}{3} \pi r^2$

II- خالی جگہوں کو پر کریں:

1. اگر قائمہ الزاویہ مثلث کے وتر کا مربع اس کے باقی اضلاع کے مربعوں کے برابر ہو تو اسے مسئلہ _____ کہتے ہیں۔

2. کسی بند شکل کی چار دیواری میں بند علاقہ _____ کہلاتا ہے۔

3. مثلث کا رقبہ = _____

4. کسی مثلث کے لیے ہیرو کلیہ کے مطابق $A =$ _____

5. کسی مساوی الاضلاع مثلث جس کے ضلع کی لمبائی 'a' ہو، کا رقبہ = _____

6. مستطیل کا رقبہ = _____

7. دائرہ کا رقبہ = _____ -

8. مکعب جس کے کنارے کی لمبائی 'l' ہو، کا حجم _____ کے برابر ہوتا ہے۔

9. کسی مکعب نما کا حجم = _____ -

10. عمودی دائروں کی مخروط (کون) کا حجم = _____ -

خلاصہ SUMMARY

مسئلہ فیثاغورث: کسی قائمہ الزاویہ مثلث میں وتر کا مربع باقی دونوں اضلاع پر مربعوں کے مجموعہ کے برابر ہوتا ہے۔

رقبہ: کسی بھی بند شکل کی چار دیواری کے اندر کی جگہ -

$$\text{مثلث کا رقبہ: ارتفاع} \times \text{قاعدہ} \times \frac{1}{2} = A$$

$$\text{مثلث کا رقبہ: } A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$s = \frac{a+b+c}{2} \text{ : مثلث کے اضلاع کی لمبائیاں ہیں}$$

$$\text{مساوی الاضلاع مثلث کا رقبہ: } A = \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \text{ جبکہ 'a' مثلث کے ضلع کی لمبائی ہے}$$

$$\text{مستطیل کا رقبہ: چوڑائی} \times \text{لمبائی} = A$$

$$\text{مربع کا رقبہ: ضلع} \times \text{ضلع} = A$$

$$\text{متوازی الاضلاع کا رقبہ: ارتفاع} \times \text{قاعدہ} = A$$

$$\text{دائرہ کا رقبہ: } A = \pi r^2$$

دائرہ کا محیط: $C = 2 \pi r$

نصف دائرہ کا رقبہ: $A = \frac{1}{2} (\pi r^2)$

واشل کا رقبہ: $A = \pi [r_1^2 - r_2^2]$

جبکہ r_1 بیرونی دائرہ کا رداس

r_2 اندرونی دائرہ کا رداس

حجم: سہ سستی شکل میں گھرا ہوا علاقہ۔

مکعب کا حجم: $V = l^3$ ، l کنارہ کی لمبائی ہے۔

مکعب نما کا حجم: $V = l \times b \times h$

اونچائی h ، چوڑائی b ، لمبائی l

عمودی دائروں کی سلنڈر کا حجم: $V = \pi r^2 h$

سلنڈر کی اونچائی h

قاعدہ کا رداس r

عمودی دائروں کی مخروط کا حجم: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

مخروط کا ارتفاع h

قاعدہ کا رداس r

کرے کا حجم: $V = \frac{4}{3} \pi r^3$

نصف کرہ کا حجم: $V = \frac{2}{3} \pi r^3$

INTRODUCTION TO COORDINATE GEOMETRY

محداتی جیومیٹری کا تعارف

- ◀ محدوداتی جیومیٹری کا تعارف
- ◀ فاصلہ کا کلیہ
- ◀ ہم خط نقاط

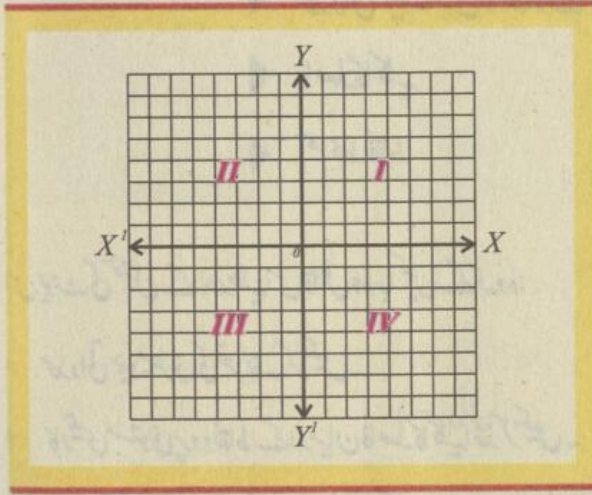
اس یونٹ کی تکمیل کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

- ◀ محدوداتی جیومیٹری کی تعریف کر سکیں۔
- ◀ کارٹیس مستوی پر دو نقاط کے درمیان فاصلہ کا کلیہ اخذ کر سکیں۔
- ◀ فاصلہ کے کلیہ کے استعمال سے دو نقاط کے درمیان فاصلہ معلوم کر سکیں۔
- ◀ ہم خط نقاط کی تعریف کر سکیں۔
- ◀ ہم خط اور غیر ہم خط نقاط کا فرق کر لیں۔
- ◀ فاصلہ کے کلیہ کے استعمال سے تین یا زیادہ نقاط کا بتا سکیں کہ آیا وہ ہم خط ہیں یا نہیں۔
- ◀ فاصلہ کے کلیہ کے استعمال سے بتا سکیں کہ دیے گئے تین نقاط سے بنتی ہے۔

- ایک مساوی الاضلاع مثلث
- ایک متساوی الساقین مثلث
- ایک قائمہ الزاویہ مثلث
- ایک غیر مساوی الاضلاع مثلث

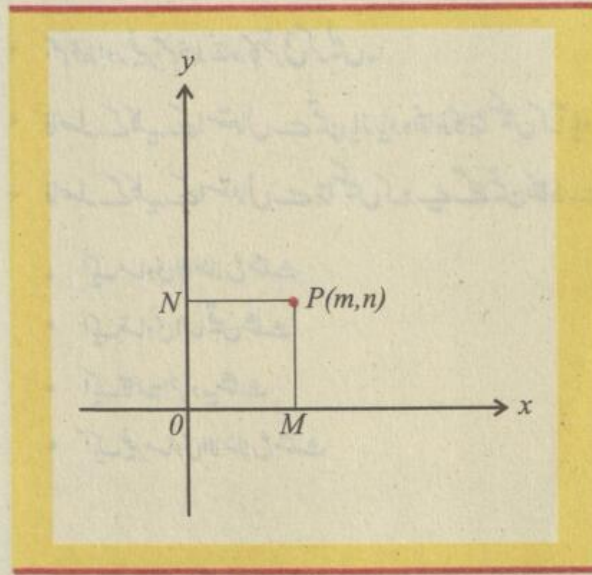
10.1 فاصلہ کا کلیہ DISTANCE FORMULA

سترہویں صدی میں فرانسیسی ریاضی دان ڈسکارٹ نے ایک مستوی کا تصور پیش کیا۔ لامحدود نقاط کا سیٹ کارٹیزی مستوی کہلاتی ہے۔ مستوی کا ہر نقطہ اعداد کے ایک جوڑے سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ ان اعداد کی قیمت مستوی میں دو ایک دوسرے کے عموداً متقاطع خطوط کی مناسبت سے لی جاتی ہے۔ ان کا نقطہ تقاطع ان خطوط کا مبداء کہلاتا ہے۔



مستوی کارٹیزی مستوی کہلاتی ہے اور محوروں میں ایک افقی محدود (XOX') اور دوسرا عمودی محور (YOY') کہلاتا ہے۔ یا x -محور اور y -محور کہلاتے ہیں۔

X اور Y محور عددی مستوی کو چار I, II, III, IV ربعوں میں تقسیم کرتے ہیں جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔



اگر P مستوی کا نقطہ ہو اور P میں سے گزرتے ہوئے محوروں کے متوازی خطوط کھینچے جائیں تو یہ محوروں کو نقاط M اور N پر ملتے ہیں۔ x -محور پر نقطہ M کا محدود $M(m)$ جو کہ P کا x -محد یا ایبسیسا (abscissa) کہلاتا ہے اور N کا y -محور پر محدود $N(n)$ محدود یا آرڈینیٹ (Ordinate) کہلاتا ہے۔

مترتب جوڑے (m, n) کے اعداد P کے محدودات کہلاتے ہیں۔ صرف m اور n عددی قیمتوں کی جگہ لیے گئے ہیں۔ چونکہ جوڑے میں پہلے x -محد کی قیمت اور بعد میں y -محد کی قیمت لکھی جاتی ہے۔ لہذا ایسا جوڑا مترتب جوڑا کہلاتا ہے یعنی کہ جوڑا $(3, 2)$ اور $(2, 3)$ برابر نہیں ہو سکتے۔

یاد رکھیے کہ:

- (i) مستوی کا ہر نقطہ اعداد کے منفرد جوڑے سے ظاہر کیا جاتا ہے۔
(ii) اعداد کے ہر جوڑے سے مستوی کا منفرد نقطہ حاصل ہوتا ہے۔

چونکہ مبدا کے دائیں جانب افقی محور پر اور مبدا کے اوپر کی جانب عمودی محور پر اعداد کو مثبت لیا جاتا ہے۔

(i) لہذا I ربع میں واقع نقطہ کی یہ خاصیت ہوتی ہے کہ اس کے دونوں محددات مثبت ہوتے ہیں۔

(ii) II ربع میں واقع نقطہ کا ایسیسا منفی اور آرڈینیٹ مثبت ہوتا ہے۔

(iii) III ربع میں واقع نقطہ کے دونوں محددات منفی ہوتے ہیں۔

(iv) IV ربع میں واقع نقطہ کا ایسیسا مثبت اور آرڈینیٹ منفی ہوتا ہے۔

(v) محور پر واقع نقاط کسی بھی ربع میں شامل نہیں ہوتے۔

(vi) مثبت x - محور کے نقطہ کا ایسیسا مثبت اور آرڈینیٹ کی قیمت صفر ہوتی ہے۔

(vii) منفی x - محور کے نقطہ کا ایسیسا منفی اور آرڈینیٹ کی قیمت صفر ہوتی ہے۔

(viii) مثبت y - محور پر آرڈینیٹ مثبت جبکہ ایسیسا کی قیمت صفر ہوتی ہے۔

(ix) منفی y - محور پر آرڈینیٹ منفی جبکہ ایسیسا کی قیمت صفر ہوتی ہے۔

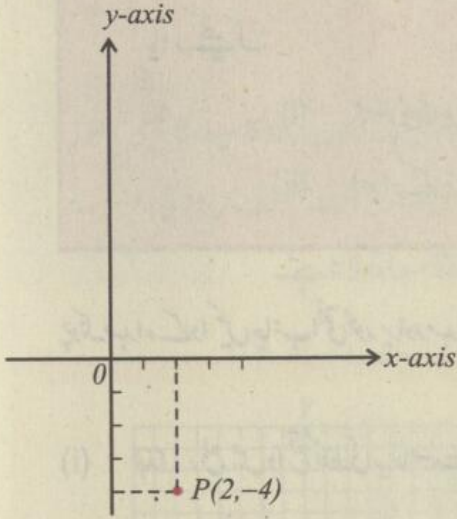
(x) مبدا کے محددات $(0, 0)$ ہوتے ہیں۔

مثال 1:-

(2, -4) کو محدودی مستوی پر ظاہر کریں۔

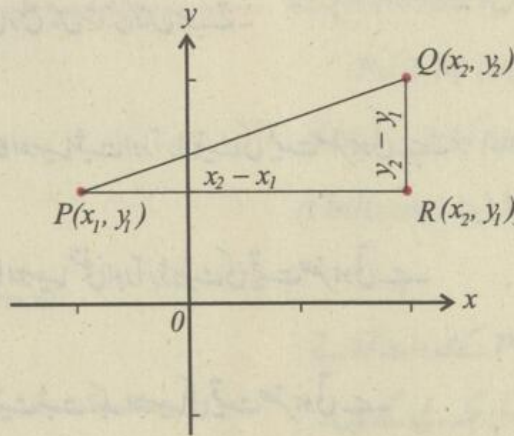
حل:

اس سوال میں ایسیسا مثبت ہے۔ لہذا یہ مبداء کی دائیں طرف ظاہر ہوگا اور آرڈینیٹ منفی ہے جو کہ مبداء کی نیچے جانب ظاہر ہوگا۔ لہذا دیا گیا نقطہ P شکل میں ظاہر کیا گیا ہے۔



10.1.2 دو نقاط کے درمیان فاصلہ Distance Between Two Points

نقاط $P(x_1, y_1)$ اور $Q(x_2, y_2)$ کو کارتیسی مستوی کی شکل میں دکھایا گیا ہے۔ قطعہ PQ کی لمبائی معلوم کرنے کے لیے ہم قائمہ الزاویہ مثلث PQR کے لیے P سے PR متوازی x -محور اور QR متوازی y -محور خطوط کھینچتے ہیں۔ دونوں خطوط R پر ملتے ہیں۔



مسئلہ فیثاغورث کی رو سے

$$|PQ|^2 = |PR|^2 + |RQ|^2$$

$$|\overline{PQ}|^2 = |(x_2 - x_1)|^2 + |(y_2 - y_1)|^2$$

$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$|\overline{PQ}| = \pm \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \text{پس}$$

چونکہ ہم صرف قطعہ کی لمبائی میں دلچسپی رکھتے ہیں اور اس کی سمت سے غرض نہیں ہے لہذا ہم صرف اس کی مثبت علامت رکھتے ہیں۔

لہذا دو نقاط $P(x_1, y_1)$ اور $Q(x_2, y_2)$ کے درمیان فاصلہ حاصل ہوتا ہے۔

$$d = |\overline{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

10.1.3 فاصلے کے کلیہ کا استعمال Use of Distance Formula

مثال 1:-

درج ذیل راس کس قسم کے مثلث کے ہیں؟ $A(6, -2)$, $B(1, -2)$, $C(-2, 2)$

حل:

دیے گئے نقاط $A(6, -2)$, $B(1, -2)$ اور $C(-2, 2)$ ہیں۔ فاصلہ کا کلیہ لگانے سے:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(1-6)^2 + (-2+2)^2} = \sqrt{5^2 + 0} = \sqrt{25} = 5$$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{(-2-6)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

$$|\overline{BC}| = \sqrt{(-2-1)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$|\overline{AB}| = |\overline{BC}| = 5 \quad \text{چونکہ}$$

پس مثلث ایک متساوی الساقین مثلث ہے۔

مثال 2:-

$A(2, 3)$ کا $P(x, y)$ سے فاصلہ، $P(x, y)$ سے $B(3, 4)$ کے فاصلہ کے دو گنا کے برابر ہو تو اس تعلق کو مساوات سے بیان کیجیے۔

حل:

بتایا گیا ہے کہ $A(2, 3)$ ، $B(3, 4)$ اور $P(x, y)$ جبکہ $P(x, y)$ کوئی سا نقطہ ہے۔ سوال کی شرط کے مطابق:

$$|AP| = 2 |BP|$$

فاصلہ کا کلیہ استعمال کرتے ہوئے

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} = 2\sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2}$$

دونوں طرف مربع اٹھانے سے

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4[(x-3)^2 + (y-4)^2]$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 4[x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16]$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13 = 4x^2 + 4y^2 - 24x - 32y + 100$$

$$3x^2 + 3y^2 - 20x - 26y + 87 = 0$$

مثال 3:-

مثلث کے راس $A(1, 1)$ ، $B(5, 5)$ اور $C(9, 1)$ ہوں تو ثابت کریں کہ یہ ایک قائمہ الزاویہ مثلث ہے۔

حل:

چونکہ $A(1, 1)$ ، $B(5, 5)$ اور $C(9, 1)$ ہیں۔ فاصلہ کا کلیہ استعمال کرتے ہوئے:

$$|AB| = \sqrt{(5-1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32}$$

$$|AC| = \sqrt{(9-1)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{8^2} = \sqrt{64}$$

$$|BC| = \sqrt{(9-5)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32}$$

$$|AB|^2 + |BC|^2 = 32 + 32$$

$$= 64$$

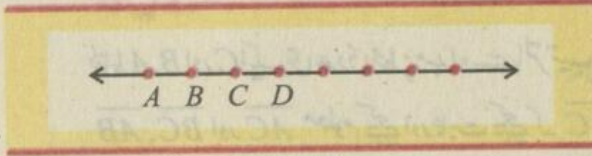
$$= |AC|^2$$

مسئلہ فیثاغورث کی رو سے

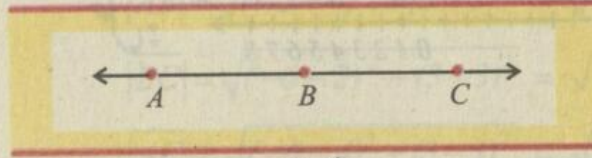
پس ΔABC ایک قائمہ الزاویہ مثلث ہے۔

10.2 ہم خط نقاط COLLINEAR POINTS

10.2.1 ہم خط نقاط



شکل (i)



شکل (ii)

ہم خط نقاط ایسے نقاط ہوتے ہیں جو کہ ایسے نقاط کے سیٹ کے رکن ہوں جس سے خط مستقیم بنتا ہو۔

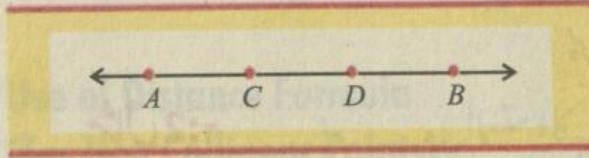
شکل (i) میں $A, B, C, D, \dots$ ہم خط نقاط ہیں۔

اگر تین نقاط ہم خط ہوں تو ان میں سے ایک نقطہ باقی

دونوں کے درمیان ہوگا شکل (ii) میں B ایسا نقطہ ہے جو نقاط

A اور C کے درمیان واقع ہے۔ $|AB| + |BC| = |AC|$

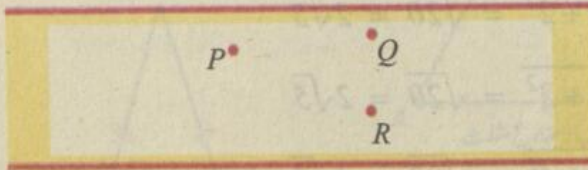
10.2.2 ہم خط اور غیر ہم خط نقاط Collinear and Non Collinear Points



ایک قطعہ خط، خط مستقیم کا ایک ایسا تختی سیٹ ہوتا ہے جس میں اُس کے دونوں انتہائی نقاط اور دونوں نقاط کے درمیان لامحدود نقاط شامل ہوتے ہیں۔

شکل میں CD ایک قطعہ خط ہے جو کہ خط مستقیم AB (یا AB) کا تختی سیٹ ہے۔ نقاط C اور D خط مستقیم AB پر واقع ہے۔ لہذا ہم خط ہیں۔

تین یا تین سے زیادہ نقاط جو ایک ہی خط مستقیم پر واقع نہ ہوں غیر ہم خط نقاط کہلاتے ہیں۔



شکل میں نقاط P, Q, R غیر ہم خط ہیں۔

یاد رکھیے کہ:

شکل میں نقاط P, Q, R غیر ہم خط نقاط ہیں۔

(i) دو نقاط ہمیشہ ہم خط ہوتے ہیں۔

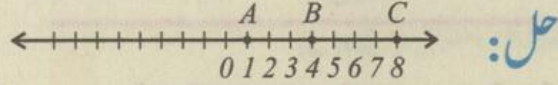
(ii) تین نقاط ہم خط بھی ہو سکتے ہیں اور نہیں بھی۔

10.2.3 Collinearity of Three Points تین نقاط کا ہم خط ہونا

مثال 1:-

نقاط A, B, C اور ایک ہی عددی خط پر مبداء سے بالترتیب $1, 4, 8$ یونٹ کے فاصلہ پر ہیں۔

$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ معلوم کیجیے اور ثابت کیجیے کہ



$$|\overline{AB}| = 4 - 1$$

$$|\overline{AB}| = 3$$

$$|\overline{BC}| = 8 - 4 = 4$$

$$|\overline{AC}| = 8 - 1 = 7$$

$$|\overline{AB}| + |\overline{BC}| = 3 + 4 \quad \text{اب}$$

$$= 7 = |\overline{AC}|$$

$$|\overline{AB}| + |\overline{BC}| = |\overline{AC}| \quad \text{پس}$$

مثال 2:-

ثابت کیجیے کہ نقاط $A(1, 4)$ ، $B(5, 6)$ اور $C(9, 8)$ ہم خط ہیں۔

حل: بتایا گیا ہے کہ $A(1, 4)$ ، $B(5, 6)$ اور $C(9, 8)$

فاصلہ کا کلیہ استعمال کرنے سے

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(5-1)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$|\overline{BC}| = \sqrt{(9-5)^2 + (8-6)^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{(9-1)^2 + (8-4)^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

$$|\overline{AB}| + |\overline{BC}| = 2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} \quad \text{اب}$$

$$= 4\sqrt{5}$$

$$= |\overline{AC}|$$

پس نقاط A, B, C اور ہم خط ہیں۔

مثال 3:- ثابت کیجئے کہ نقاط $A(4,3)$ ، $B(-2,3)$ اور $C(-6,3)$ ہم خط ہیں۔

حل:

بتایا گیا ہے کہ $A(4,3)$ ، $B(-2,3)$ اور $C(-6,3)$ ہیں۔

فاصلہ کا کلیہ استعمال کرنے سے

$$|AB| = \sqrt{(-2-4)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{36+0} = 6$$

$$|BC| = \sqrt{(-6-2)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{16+0} = 4$$

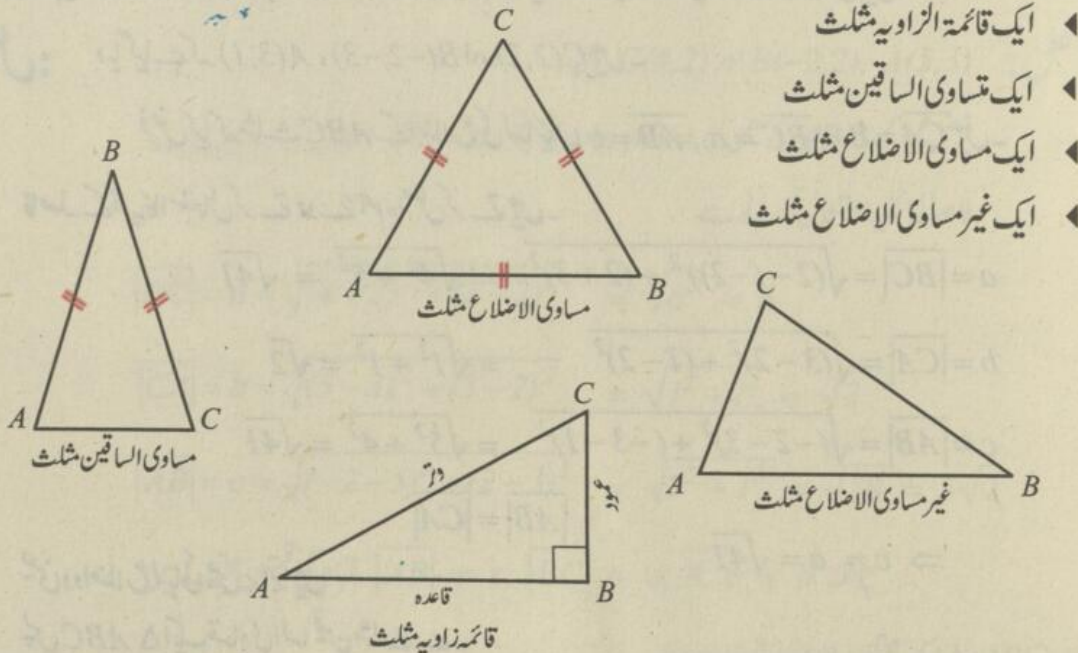
$$|AC| = \sqrt{(-6-4)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{100} = 10$$

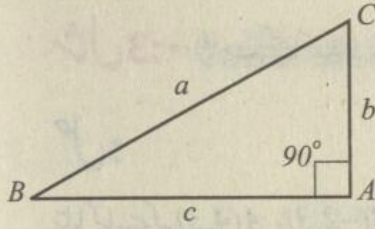
$$\begin{aligned} \text{Now } |AB| + |BC| &= 6 + 4 \\ &= 10 \\ &= |AC| \end{aligned}$$

پس نقاط A ، B اور C ہم خط ہیں۔

10.2.4 (غیر ہم خط نقاط) میں فاصلے کے کلیہ کا استعمال (Use of Distance Formula) (For Non Collinear Points)

ہم فاصلہ کے کلیہ کا استعمال کر کے فیصلہ کرتے ہیں کہ تین غیر ہم خط نقاط بناتے ہیں۔





مثال 1:- ثابت کیجیے کہ نقاط $A(-1, 2)$ ، $B(7, 5)$ اور $C(2, -6)$ ایک قائمہ الزاویہ مثلث کے راس ہیں۔

حل:

دیا گیا ہے کہ فرض کریں کہ a, b, c مثلث ABC کے اضلاع $\overline{BC}$ ، $\overline{CA}$ اور $\overline{AB}$ کی بالترتیب لمبائیاں ہیں۔

فاصلہ کے فارمولا کا استعمال کرتے ہوئے $|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ ہمیں حاصل ہوتا ہے:

$$a = |\overline{BC}| = \sqrt{(2-7)^2 + (-6-5)^2} = \sqrt{5^2 + 11^2} = \sqrt{146}$$

$$b = |\overline{CA}| = \sqrt{(2-(-1))^2 + (-6-2)^2} = \sqrt{3^2 + 8^2} = \sqrt{73}$$

$$c = |\overline{AB}| = \sqrt{(7-(-1))^2 + (5-2)^2} = \sqrt{(8)^2 + (3)^2} = \sqrt{64+9} = \sqrt{73}$$

$$= c^2 + b^2 \quad \text{چونکہ}$$

$$= 73 + 73 = 146$$

$$= |\overline{BC}|^2$$

یعنی $m\angle A = 90^\circ$ پس $\triangle ABC$ ایک قائمہ الزاویہ مثلث ہے۔

مثال 2:-

ثابت کیجیے کہ نقاط $A(3, 1)$ ، $B(-2, -3)$ اور $C(2, 2)$ ایک متساوی الساقین مثلث کے راس ہیں۔

حل: دیا گیا ہے کہ $A(3, 1)$ ، $B(-2, -3)$ اور $C(2, 2)$ ہیں۔

فرض کیا کہ مثلث ABC کے اضلاع کی لمبائیاں $\overline{AB} = c$ ، $\overline{BC} = a$ اور $\overline{CA} = b$ ہیں۔

فاصلہ کے کلیہ کا استعمال کرتے ہوئے ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$a = |\overline{BC}| = \sqrt{(2-(-2))^2 + (2+3)^2} = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$$

$$b = |\overline{CA}| = \sqrt{(3-2)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$c = |\overline{AB}| = \sqrt{(-2-3)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}$$

$$|\overline{AB}| = |\overline{CA}|$$

$$\Rightarrow c = a = \sqrt{41}$$

یعنی دو اضلاع لمبائی میں برابر ہیں

پس $\triangle ABC$ ایک متساوی الساقین مثلث ہے۔

مثال 3:-

ثابت کیجیے کہ نقاط $A(-3, 0)$ ، $B(3, 0)$ اور $C(0, 3\sqrt{3})$ ایک مساوی الاضلاع مثلث کے راس ہیں۔

حل: چونکہ $A(-3, 0)$ ، $B(3, 0)$ اور $C(0, 3\sqrt{3})$ ہیں۔

فاصلہ کا کلیہ استعمال کرنے سے

$$|AB| = \sqrt{(-3-3)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{(-6)^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$|BC| = \sqrt{(3-0)^2 + (0-3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+27} = \sqrt{36} = 6$$

$$|AC| = \sqrt{(-3-0)^2 + (0-3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+27} = \sqrt{36} = 6$$

$$|AB| = |BC| = |AC| = 6 \quad \text{یہاں}$$

یعنی مثلث ABC کے تینوں اضلاع لمبائی میں برابر ہیں۔

لہذا ΔABC ایک مساوی الاضلاع مثلث ہے۔

مثال 4:-

ثابت کیجیے کہ نقاط $A(5, 3)$ ، $B(-2, 2)$ اور $C(4, 2)$ ایک مختلف الاضلاع مثلث کے ہیں۔

حل: $A(5, 3)$ ، $B(-2, 2)$ اور $C(4, 2)$ ہیں۔

فرض کیا کہ ΔABC میں $\overline{AB} = c$ ، $\overline{CA} = b$ ، $\overline{BC} = a$ اضلاع کی لمبائیاں ہیں۔

فاصلہ کا کلیہ استعمال کرنے سے

$$|BC| = a = \sqrt{(4+2)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{6^2} = 6$$

$$|CA| = b = \sqrt{(5-4)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$|AB| = c = \sqrt{(-2-5)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

چونکہ $|AB| = c$ ، $|BC| = a$ ، $|CA| = b$ تمام کی قیمتیں مختلف ہیں

پس ΔABC ایک مختلف الاضلاع مثلث ہے۔

مشق 10.1

1- محدودی مستوی میں درج ذیل نقاط کو ظاہر کیجیے۔

- | | | | |
|-------------|--------------|--------------|----------------|
| (i) (1,0) | (ii) (0,4) | (iii) (-2,4) | (iv) (3,6) |
| (v) (-4,0) | (vi) (-8,-8) | (vii) (7,-5) | (viii) (-8,10) |
| (ix) (0,-7) | (x) (8,-3) | | |

2- درج ذیل نقاط کے درمیان فاصلہ معلوم کیجیے۔

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| (i) (2,1) , (-4,3) | (ii) (-1,3) , (-2,-1) |
| (iii) (7,-2) , (-2,3) | (iv) (a,-b) , (b,-a) |

3- اگر نقطہ $P(x,y)$ دو نقاط $A(2,4)$ اور $B(6,8)$ سے ہم فاصلہ ہو تو اس کو مساوات کی شکل میں لکھیے۔

4- ثابت کیجیے کہ نقاط $A(5,4)$ ، $B(4,-3)$ اور $C(-2,5)$ نقطہ $D(1,1)$ سے ہم فاصلہ ہیں۔

5- ایسا نقطہ معلوم کیجیے جو $(2,4)$ اور $(6,8)$ سے یکساں فاصلہ پر اور x محور پر واقع ہو۔
(اشارہ: نقطہ $(x,0)$ لیجیے اور x کی قیمت معلوم کیجیے۔)

6- ثابت کیجیے کہ نقاط $A(0,2)$ ، $B(3,-2)$ اور $C(0,-2)$ ایک قائمہ الزاویہ مثلث کے راس ہیں۔

7- ثابت کیجیے کہ نقاط $A(-1,1)$ ، $B(3,2)$ اور $C(7,3)$ کے ہم خط نقاط ہیں۔

8- ثابت کیجیے کہ نقاط $A(6,1)$ ، $B(2,7)$ اور $C(-6,-7)$ ایک قائمہ الزاویہ مثلث کے راس ہیں۔

9- ثابت کیجیے کہ نقاط $A(2,4)$ ، $B(6,2)$ اور $C(4,3)$ ہم خط نقاط ہیں۔

10- ثابت کیجیے کہ نقاط $A(4,-2)$ ، $B(-2,4)$ اور $C(5,5)$ ایک تساوی الساقین مثلث کے راس ہیں۔

11- ثابت کیجیے کہ نقاط $A(-2,11)$ ، $B(-6,-3)$ اور $C(4,-9)$ ایک غیر مساوی الاضلاع والی مثلث کے راس ہیں۔

12- ثابت کیجیے کہ نقاط $A(6,1)$ ، $B(2,7)$ اور $C(-6,7)$ ایک غیر مساوی الاضلاع مثلث کے راس ہیں۔

13- ثابت کیجیے کہ نقاط $A(0,-3)$ ، $B(0,7)$ اور $C(5\sqrt{3},2)$ ایک مساوی الاضلاع مثلث کے راس ہیں۔

جائزہ مشق-10

I- صحیح جوابات کے گرد دائرہ لگائیے۔

1. $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ کہلاتا ہے۔

- (a) فاصلہ کا کلیہ (b) ہم خط نقاط
(c) غیر ہم خط نقاط (d) مساوی نقاط

2. کارٹیسی مستوی میں ایک نقطہ کے منفرد مترتب جوڑے کا تعین کرتا ہے۔

- (a) سیٹ (b) ایسیسیا (c) اعداد (d) آرڈینیٹ

3. ایک مستوی میں ہر مترتب جوڑے سے منسلک ہوتا ہے:

- (a) ایک منفرد نقطہ (b) صفر (c) دو نقاط (d) چار نقاط

4. ایک ہی خط پر واقع نقاط کہلاتے ہیں:

- (a) غیر ہم خط (b) ہم نقاط (c) مساوی (d) منطبق

5. ایسے نقاط جو ایک ہی خط پر نہ ہوں کہلاتے ہیں:

- (a) غیر ہم خط (b) ہم خط (c) مساوی (d) صفر

6. محور پر موجود نقطہ کسی میں نہیں ہوتا:

- (a) مستوی (b) خط (c) ربع (d) دائرہ

7. مبدا کے محددات ہوتے ہیں:

- (a) 0 (b) (1, 0) (c) (0, 0) (d) (0, 1)

8. منفی محور پر نقطہ کی منفی ہوتی ہے:

- (a) ایسیسیا (b) آرڈینیٹ (c) قیمت (d) کسر

9. چوتھے ربع میں واقع نقطہ کے آرڈینیٹ کی قیمت ہوتی ہے:

- (a) مثبت (b) منفی (c) صفر (d) 1

10. پہلے ربع میں واقع نقطہ کی یہ خصوصیت ہوتی ہے کہ اس کے محددات ہوتے ہیں:

- (a) صفر (b) مثبت
(c) منفی (d) مثبت اور منفی دونوں

-II خالی جگہوں کو پُر کیجیے۔

1. $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ _____ کہلاتا ہے۔
2. کارٹیسی مستوی میں ہر نقطہ کے مطابق اعداد کا _____ ہوتا ہے۔
3. مستوی میں ہر مترتب جوڑے کے ساتھ ایک _____ واسطہ ہوتا ہے۔
4. ایک ہی خط پر واقع نقاط _____ کہلاتے ہیں۔
5. نقاط جو ایک ہی خط پر واقع نہ ہوں _____ نقاط کہلاتے ہیں۔
6. محدودوں پر موجود نقاط کسی _____ میں واقع نہیں ہوتے۔
7. مبداء کے محددات _____ ہوتے ہیں۔
8. منفی x-محور پر موجود کسی نقطہ کا ایسیسیا منفی ہوتا ہے اور اس کا آرڈینیٹ _____ ہوتا ہے۔
9. چوتھے ربع میں واقع نقطہ کا ایسیسیا مثبت اور آرڈینیٹ _____ ہوتا ہے۔
10. پہلے ربع میں واقع نقطہ کی یہ خصوصیت ہے کہ اس کے دونوں محددات _____ ہوتے ہیں۔

خلاصہ SUMMARY

فاصلہ کا کلیہ: $d = |\overline{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

- 1- ایک مستوی میں کسی بھی نقطہ کے لیے اعداد کا مترتب جوڑا منفرد ہوتا ہے۔
 - 2- نمبروں کے ہر مترتب جوڑے کو مستوی کے صرف ایک ہی نقطہ سے منسلک کیا جاسکتا ہے۔
- ہم خط نقاط: ایک ہی خط پر واقع نقاط ہم خط نقاط کہلاتے ہیں۔
- غیر ہم خط نقاط: ایسے نقاط جو ایک ہی خط پر واقع نہ ہوں غیر ہم خط نقاط کہلاتے ہیں۔

جوابات

مشق 1.1

1- 9,8 2- -11 3- 9 4- 11,71 5- 1,0 6- 18.86 7- 804.57 8- 25,1

9- $\frac{2y}{3x^2}$ 10- $\frac{25a}{14b^2}$ 11- $\frac{4a^3b^3}{5a^2+3b}$ 12- $\frac{2m}{3x^5-4m^2x^3}$ 13- $\frac{5}{c+d}$

14- $\frac{x+y}{-3}$ 15- $\frac{2x^3+x^2y-xy^2}{x^3-x^2y+xy^2-y^3}$ 16- $\frac{4x^3-6x^2-4x}{x^3+2x^2-x-2}$ 17- $\frac{3x-1}{x^3-7x-6}$

18- $\frac{2x-3y}{2x+3y}$ 19- $\frac{x-2y}{x^2-y^2}$ 20- $\frac{x-2y}{xy-y^2}$ 21- $\frac{2}{x-1}$

22- $\frac{37x+1}{x^2-12x+27}$ 23- $\frac{x^2-4x+4}{x^2+2x}$ 24- $\frac{-(x+6)}{x+1}$ 25- $\frac{x^3+x^2+20x}{x^2+4x-5}$

26- $\frac{3x+4}{2x+1}$ 27- $\frac{4x^3-x}{2x^2-1}$ 28- $\frac{x}{x^3-2x^2+2x-1}$ 29- $\frac{x}{3x-9}$

30- x 31- 1 32- $x-1$

مشق 1.2

1- $2x^2+8y^2$ 2- $50x^2+18y^2$ 3- $24lm$ 4- l^8-m^8 5- $a^3b^3-\frac{1}{a^3b^3}-3ab+\frac{3}{ab}$

6- $4x^2+9y^2+4+12xy+12y+8x$ 7- $8p^3+12p^2q+6pq^2+q^3$

8- $9p^2+q^2+r^2+6pq+2qr+6pr$ 9- $8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3$

10- $(x+y-1)(x^2+y^2+2xy+x+y+1)$ 11- $(x-y+4)(x^2+y^2-2xy-4x+4y+16)$

12- $(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)$ 13- $(x+3y)(x^2-3xy+9y^2)(x-3y)(x^2+3xy+9y^2)$

14- $(2a+b)(2a-b)(4a^2-2ab+b^2)(4a^2+2ab+b^2)$ 15- 4 17- $17,4$ 18- 14

19- 133 20- 118 21- 20 22- 46

جوابات

مشق 1.3

- 1- (i) $\frac{\sqrt{5}}{5}$, (ii) $\frac{7\sqrt{6}}{3}$, (iii) $\frac{\sqrt{42}}{7}$ 2- (i) $3\sqrt{2}$, (ii) $35\sqrt{2}$, (iii) $4\sqrt{15} - 6\sqrt{6} - 2\sqrt{10} + 6$
 (iv) $30 - 6\sqrt{5} + 5\sqrt{2} - \sqrt{10}$ (v) $5\sqrt{3} - \sqrt{15} - 10 + 2\sqrt{5}$ (vi) $35 + 7\sqrt{2} + 5\sqrt{3} + \sqrt{6}$
 3- (i) $2 - \sqrt{3}$ (ii) $\frac{4 + \sqrt{5}}{11}$ (iii) $2\sqrt{3}(\sqrt{7} - \sqrt{5})$ (iv) $\frac{x + y - 2\sqrt{xy}}{x - y}$
 (v) $\frac{105 - 10\sqrt{7}}{59}$ (vi) $5 + 2\sqrt{6}$ (vii) $\frac{29(11 - 3\sqrt{5})}{76}$ (viii) $\frac{3\sqrt{7} - 2\sqrt{3}}{3}$
 4- (i) $2\sqrt{5}$ (ii) 18 5- (i) $2\sqrt{3}$ (ii) 14 6- (i) $-2\sqrt{2}$ (ii) 10
 7- (i) $\frac{24 - 6\sqrt{2}}{7}$ (ii) $\left(\frac{-18 + 8\sqrt{2}}{7}\right)$ 8- (i) 40 (ii) 36
 9- (i) $\frac{2b^2 - a^2 + 2b\sqrt{b^2 - a^2}}{a^2}$ (ii) $\frac{a - \sqrt{a^2 - 9}}{3}$

جائزہ مشق 1

I- درست جواب کے گرد دائرہ لگائیے۔

- 1- b 2- b 3- d 4- c 5- d 6- a 7- d 8- b 9- c 10- a

II- خالی جگہ پُر کریں۔

- 1- ناطق اعداد 2- ناطق جملہ 3- $4ab$ 4- $2(a^2 + b^2)$
 5- $(a+b)^3$ 6- $(a-b)^3$ 7- $a^3 - b^3$ 8- $a^3 + b^3$ 9- مقادیر اسم 10- 2

مشق 2.1

- 1- $(x + y)(3a - 7b)$ 2- $(a - x)(x + y)$ 3- $(a - 3)(a^2 + 1)$
 4- $(x - 1)(x^2 + x - y)$ 5- $(x + 2y)(3a - 4b)$ 6- $(a - b)(2a + c)$
 7- $(a - b)(a + c)$ 8- $(4 - a^3)(2 - a)$ 9- $(4x - 3a)^2$
 10- $(1 - 7x)^2$ 11- $5(2x - 1)^2$ 12- $2ab(a - b)^2$
 13- $(x + \frac{1}{2})^2$ 14- $(x - \frac{1}{x})^2$ 15- $5x(x - 3)^2$ 16- $(a + b)(a + b + 2c)$

جوابات

مشق 2.2

- | | |
|---|--------------------------------------|
| 1- $(x + y + a)(x + y - a)$ | 2- $(2a - b - 3c)(2a + b - 3c)$ |
| 3- $(x + 3a + 4b)(x + 3a - 4b)$ | 4- $(y + x - c)(y - x + c)$ |
| 5- $(x + y + 2xy)(x + y - 2xy)$ | 6- $(a - 2b - 3ac)(a - 2b + 3ac)$ |
| 7- $(x - y - a + b)(x - y + a - b)$ | 8- $(y^2 + 2y + 2)(y^2 - 2y + 2)$ |
| 9- $(z^2 + 8y^2 - 4yz)(z^2 + 8y^2 + 4yz)$ | 10- $(x^3 - 6x + 18)(x^3 + 6x + 18)$ |
| 11- $(z^2 - 3z + 4)(z^2 + 3z + 4)$ | 12- $(2x - y)(x - y)(2x + y)(x + y)$ |

مشق 2.3

- | | | |
|-----------------------|--------------------------------------|------------------------|
| 1- $(x + 4)(x + 5)$ | 2- $(x - 2)(x + 7)$ | 3- $(x - 1)(x + 6)$ |
| 4- $(x - 3)(x - 4)$ | 5- $(x - 13)(x + 12)$ | 6- $(x - 2)(x + 1)$ |
| 7- $(x - 15)(x + 6)$ | 8- $(a - 17)(a + 5)$ | 9- $(7 - x)(x + 14)$ |
| 10- $(y - 19)(y + 8)$ | 11- $(x + 1)(2x + 1)$ | 12- $(x + 1)(3x + 2)$ |
| 13- $(x - 1)(2x + 1)$ | 14- $(2x + 3)(3x - 1)$ | 15- $(x + 2)(1 - 2x)$ |
| 16- $(2 - x)(4 + 5x)$ | 17- $(u - 2)(3u - 4)$ | 18- $(2x - 3)(5x + 4)$ |
| 19- $(x - 6)(5x - 2)$ | 20- $(4x - \sqrt{3})(\sqrt{3}x + 2)$ | |

مشق 2.4

- | | |
|---|-------------------------------------|
| 1- $(2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2)$ | 2- $(3x + 1)(9x^2 - 3x + 1)$ |
| 3- $(1 - 7x)(1 + 7x + 49x^2)$ | 4- $(ab + 8)(a^2b^2 - 8ab + 64)$ |
| 5- $(3 - 10y)(9 + 30y + 100y^2)$ | 6- $(3x - 4y)(9x^2 + 12xy + 16y^2)$ |
| 7- $(xy + z)(x^2y^2 - xyz + z^2)$ | 8- $(6p - 7)(36p^2 + 42p + 49)$ |
| 9- $(2x - \frac{1}{3})(4x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9})$ | 10- $(a + b)[a^2 - ab + b^2 + 1]$ |
| 11- $(a - b)[1 - (a^2 + ab + b^2)]$ | 12- $x(1 - 2y)(1 + 2y + 4y^2)$ |
| 13- $(x - y)(x + y)(x^2 + y^2)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4)$ | |

جوابات

14- $(1 - \frac{4p}{q})(1 + \frac{4p}{q} + \frac{16p^2}{q^2})$

15- $(1 + 4u)(1 - 4u + 16u^2)$

16- $(2x + 3y)(4x^2 + 9y^2 - 6xy - 3)$

17- $(z + 5)(z^2 - 5z + 25)$

18- $(x + y)(x^2 - xy + y^2)(x^6 - x^3y^3 + y^6)$

19- $(m + n)(m - n)(m^2 + mn + n^2)(m^2 - mn + n^2)$

20- $x(2x - a)(2x + a)(4x^2 + 2ax + a^2)(4x^2 - 2ax + a^2)$

21- $(x - 3a)(x^2 + 3ax + 9a^2)$

22- $(x + 3a)(x^2 - 3ax + 9a^2)$

مشق 2.5

- 1- 3 2- -6 3- -47 4- 0 5- -84 6- جزو ضربی ہے 7- جزو ضربی ہے 8- نہیں ہے
9- جزو ضربی ہے 10- جزو ضربی ہے 11- نہیں ہے 12- جزو ضربی ہے 13- جزو ضربی ہے 14- نہیں ہے 15- نہیں ہے 16- جزو ضربی ہے
17- جزو ضربی ہے 18- نہیں ہے 19- $k = 1$ 20- $k = 1$

جائزہ مشق 2

I- درست جواب کے گرد دائرہ لگائیے۔

- 1- b 2- c 3- d 4- a 5- c 6- b 7- a 8- a 9- a 10- a

II- خالی جگہ پر کریں۔

- 1- ایک 2- دو 3- تین 4- $(x - 3)(x + 3)$ 5- $(x + 1)(x + 3)$
6- $(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$ 7- $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$ 8- 3 9- 11 10- 0

مشق 3.1

- 1- ab 2- 3qr 3- $4xy^2z^2$ 4- 7ab 5- $3x^2y^2$
6- 2abc 7- $x + 4$ 8- $x^2 - y^2$ 9- $t + 3$ 10- $x - 2$
11- $1 + x$ 12- $x - 2$ 13- $x + 1$ 14- $x(x + 3)$ 15- 5abc

جوابات

مشق 3.2

- 1- $x^2 + x - 1$ 2- $2x^2 - 3x + 2$ 3- $2(x - 1)$ 4- $x(x + 3)$ 5- $(x + 1)^2(x - 1)$ 6- $(x - 2)$
7- $(x - 1)$ 8- $(3x - 5)$ 9- $(2x + 1)$ 10- $(x + 3)$

مشق 3.3

- 1- $420a^4x^4y^4$ 2- $15a^4b^3c^5$ 3- $12abc$ 4- $x^2y^2z^2$
5- $p^2q^2(p - q)(p + q)(p^2 + pq + q^2)$ 6- $(x + 4)(x - 4)(x^2 - 4x + 16)$
7- $(x - 2)(x + 3)(x + 1)(x - 1)$ 8- $(y + 3)(y - 2)(y + 3)(y - 3)$
9- $(1 + y)(1 - y)(1 - 2y)(y^2 - y + 1)$ 10- $(x - y)(x + y)(x^2 + y^2)(x^4 + x^2y^2 + y^4)$
11- $(x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)^2$
12- $(x + y)(x^2 + y^2)(x - y)(x^2 - xy + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4)$ 13- $(2x + 3)(x + 1)^2(x + 3)$
14- $x^2(x + 3)(x - 2)(x - 3)$ 15- $(x + y)^2(x + 2y)^2$

مشق 3.4

- 1- $x^2 + 1$; $x^4 - 1$ 2- $(x^2 - 4)(x - 3)(x^3 - x^2 - 4x + 4)$ 3- $2x^2 + 1$; $2x^4 - x^2 - 1$
4- $2x^2 - 3x - 2$; $(3x - 1)(8x^4 - 6x^3 - 15x^2 - 9x - 2)$
5- $(3x^2 + 8x - 3); (2x^2 - 3x + 1)(3x^4 + 17x^3 + 27x^2 + 7x - 6)$
6- $(x^2 + 2x - 3); (2x^2 - x - 5)(2x^4 + x^3 - 20x^2 - 7x + 24)$
7- $(x^3 - 1); (x - 1)(x^4 + x^3 - x - 1)$ 8- $(x + 1); (x^3 + 1)(x^4 + x^3 - x - 1)$
9- $x^2 - 12x + 35$ 10- $(6x^2 + x - 2)$ 11- $x + 4$ 12- $x - 1$ 13- $x^3 - 9x^2 + 26x - 24$
14- $x^3 - 7x^2 + 16x - 12$ 15- $x^4 + 8x^3 + 11x^2 - 32x - 60$ 16- $x^5 - x^4 - 2x + 4$

مشق 3.5

- 1- $\frac{2(2a + 1)}{a(a + 1)(a + 2)}$ 2- $\frac{2ax + x - 3a - 6a^2}{(x - 2a)(x - 3a)}$ 3- $2 + a^4$ 4- $\frac{1}{x^4 + x^2 + 1}$

جوابات

5- $\frac{2b^2(a-c)}{(a+b)(b+c)}$ 6- $\frac{6x^3}{x^6-1}$ 7- $\frac{2a^3}{a^2-b^2}$ 8- 1 9- 1 10- 1
11- $\frac{a}{a-b}$ 12- $\frac{a+1}{a+2}$

مشق 3.6

1- $\pm(4x+3y)$ 2- $\pm(x-3)(x-4)(x-5)$ 3- $\pm(x+1)(x+7)(2x-3)$ 4- $\pm(x^2+6x+4)$
5- $\pm(4x^2+16x+11)$ 6- $\pm(x+\frac{1}{x}-5)$ 7- $\pm(t+\frac{1}{t}-2)$ 8- $\pm(x^2+\frac{1}{x^2}-2)$
9- $\pm(2x^2+3x+4)$ 10- $\pm(\frac{3x}{2y}-\frac{1}{2}-\frac{2y}{3x})$ 11- $x=8$ 12- $\ell=4, m=10$

جائزہ مشق 3

I- درست جواب کے گرد دائرہ لگائیے۔

1- a 2- c 3- c 4- a 5- b 6- a 7- c 8- c 9- a 10- a

II- خالی جگہ پر کریں۔

1- „ 2- „ 3- H.C.F 4- L.C.M 5- H.C.F 6- دوسرا جملہ

7- $2x+1$ 8- $x+2$ 9- $2x^2y^3$ 10- $6x^2y^2z$

مشق 4.1

1- (i) 8, (ii) 80, (iii) 11, (iv) 2 2- $\frac{5}{2}$ 3- 2 4- -7 5- -2
6- 3 7- 4 8- 4 9- 3 10- {4} 11- {9} 12- {18} 13- {8}
14- {} 15- {} 16- {13, 5} 17- {8} 18- {13} 19- {101} 20- {15}

مشق 4.2

1- ± 9 2- -1, 7 3- -6, 4 4- -1, 4 5- $\frac{5}{3}, \frac{-13}{3}$ 6- $x < 7$

جوابات

- 7- $x > -3$ 8- $x < -1$ 9- $x < -10$ 10- $x > -\frac{17}{9}$ 11- $x < -21$
 12- $x > -12\frac{5}{7}$ 13- $x \geq 6$ 14- $x \leq 1\frac{7}{18}$ 15- $x \geq 1\frac{1}{2}$ 16- $x \geq 0$

جائزہ مشق 4

I- درست جواب کے گرد دائرہ لگائیے۔

- 1- a 2- c 3- c 4- c 5- c 6- a 7- c 8- a

II- خالی جگہ پُر کریں۔

- 1- > 2- > 3- < 4- < 5- > 6- > 7- > 8- <
 9- < 10- < 11- < 12- >

مشق 5.1

- 1- -2, 6 2- 1, 5 3- -8, 1 4- 2, 3 5- $2, \frac{4}{3}$ 6- $-8, \frac{1}{2}$ 7- 3, -4
 8- $3, -\frac{1}{3}$ 9- $2, -\frac{1}{2}$ 10- $2, -\frac{4}{5}$ 11- $2, -\frac{3}{2}$ 12- $-\frac{1}{2}, \frac{4}{5}$ 13- $1, -\frac{1}{2}$
 14- $5 \pm 2\sqrt{7}$ 15- $3 \pm 2\sqrt{3}$ 16- $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ 17- $-3 \pm 2\sqrt{3}$ 18- $\frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$
 19- $\frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$ 20- $\frac{-5 \pm \sqrt{73}}{6}$ 21- $\frac{-m \pm \sqrt{m^2 - 4n}}{2}$ 22- $\frac{3 \pm 4\sqrt{15}}{11}$ 23- $-2 \pm \sqrt{17}$
 24- $\frac{10 \pm 4\sqrt{15}}{5}$ 25- {13, -2}

مشق 5.2

- 1- 2, 3 2- $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}$ 3- $-1, \frac{2}{3}$ 4- $-1, \frac{3}{2}$ 5- -5, 3 6- $3, -\frac{7}{2}$ 7- $\pm \sqrt{10}$
 8- $\pm 2\sqrt{6}$ 9- ± 8 10- $\frac{5}{3}$ 11- 0, -5 12- $5, \frac{1}{3}$

جوابات

مشق 5.3

- 1- 5,7 2- 8,10 3- 9,18 4- 5 5- 5,6 6- 12,13 7- 7,9
8- 4,8 یا 8,4

جائزہ مشق 5

I- درست جواب کے گرد دائرہ لگائیے۔

- 1- a 2- b 3- b 4- a 5- c 6- c 7- c 8- c 9- b 10- b

II- خالی جگہ پر کریں۔

- 1- دو درجی 2- کوآریٹک فارمولا 3- $x(2x - 3)$ 4- $\{-1, 3\}$ 5- تین
6- کوآریٹک فارمولا 7- $\{2, 3\}$ 8- $\{\pm 3\}$ 9- $(x-2)(x+2)(x^2+4)$ 10- $\{\pm 1\}$

مشق 6.1

- 1- $2-by-2, 3-by-1, 3-by-2$ 2- $2-by-2, 3-by-3, 1-by-3$
3- 5 4- $B=F, G=J, H=K, C=E, A=D$

مشق 6.2

- 1- قطاری قالب = A, H کالمی قالب = C, H مربعی قالب = B, D, E, F, H مستطیلی قالب = A, C, G
2- قطری قالب = A, C, F سکیلر قالب = B, E, G ضربی قالب = D

3- $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & c \\ -b & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} l & p & a \\ m & q & b \\ n & r & c \end{bmatrix}$ 4- A, C 5- A, C, E 6- C 7- A

مشق 6.3

1- (i) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 9 \\ 3 & 8 & 11 \\ 5 & 13 & 1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 5 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & -5 & -5 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 4 & 9 & 23 \\ 8 & 19 & 28 \\ 11 & 30 & 0 \end{bmatrix}$
(v) $\begin{bmatrix} 6 & 5 & -8 \\ -5 & 3 & -9 \\ 8 & 11 & 17 \end{bmatrix}$ (vi) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -6 \\ -3 & -1 & -7 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ 2- $-A = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}, -B = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$

جوابات

$$-C = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ -4 \end{bmatrix}, -D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, -E = [-2 \ -5 \ 3] \quad 4- \ -1, 2 \quad 6- X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \\ -\frac{4}{3} & 2 \end{bmatrix}$$

$$7- a=2, b=-4, c=4, d=3, e=4, f=2 \quad 8- w=-1, x=1, y=7, z=-8$$

$$9- \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}$$

مشق 6.4

$$9- \begin{bmatrix} 12 & 13 \end{bmatrix}$$

$$10- \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$11- \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$12- \begin{bmatrix} 1 & -9 \\ -3 & 17 \end{bmatrix}$$

$$13- \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}$$

$$14- \begin{bmatrix} 10 & -14 \\ 15 & 3 \end{bmatrix}$$

$$15- a = \frac{10}{7}, b = 0$$

مشق 6.5

$$1- (i) uy - vx \quad (ii) -13 \quad (iii) 0 \quad (iv) \frac{13}{64}$$

$$2- (i) \text{ تادر} \quad (ii) \text{ غیر تادر} \quad (iii) \text{ غیر تادر}$$

$$3- (i) \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (ii) \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \quad (iii) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad (iv) \text{ معکوس نا قابل حل ہے}$$

$$(v) \begin{bmatrix} 4 & \frac{3}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (vi) \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (vii) \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \quad 4- M^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

مشق 6.6

$$1- \frac{-9}{2} \quad 2- (i) (3, 1) \quad (ii) \left(\frac{7}{3}, \frac{3}{2}\right) \quad (iii) \left(\frac{-1}{2}, \frac{2}{5}\right) \quad (iv) (-1, 5) \quad (v) (0, 2) \quad (vi) (-2, 6)$$

$$3- (3, -1) \quad 4- (i) (-1, 2) \quad (ii) (1, -1) \quad (iii) (4, -1) \quad (iv) \text{ قابل حل} \quad (v) (2, -1) \quad (vi) \left(\frac{31}{21}, \frac{59}{21}\right)$$

$$5- (i) 2x - y = 2, 5x + 2y = 4 \quad (ii) -5x + 2y = 2, 2x - 3y = -1$$

$$(iii) -4x + y = 1, 5x + 4y = -1 \quad (iv) 0.8x - 0.6y = 1, 0.6x + 0.8y = 2$$

جوابات

جائزہ مشق 6

I- درست جواب کے گرد دائرہ لگائیے۔

- 1- a 2- a 3- a 4- c 5- a 6- c 7- b 8- c 9- c 10- c

II- خالی جگہ پر کریں۔

- 1- مرتبہ 2- قطاری قالب 3- ہم مرتبہ 4- لہذا 5- مساوی
6- 1 7- خاصیت تلازم 8- غیر متشکل 9- $B^t A^t$ 10- $B^{-1} A^{-1}$

مشق 7.1

- 1- (i) 130° (ii) 115° (iii) 42° (iv) 30° (v) 108° (vi) 20° 2- $105^\circ, 75^\circ$ 3- 70°
4- $0^\circ, 100^\circ$ 5- $70^\circ, 30^\circ$ 6- $x = 60^\circ$ 7- (i) $a = 40^\circ$
(ii) $c = 35^\circ, d = 145^\circ$ (iii) $e = 29^\circ, f = 151^\circ$ (iv) $b = 135^\circ$
(v) $q = 77^\circ, P = 103^\circ, r = 103^\circ$ (vi) $j = 30^\circ, k = 150^\circ, l = 30^\circ$
(vii) $g = 140^\circ, h = 40^\circ, i = 140^\circ$ (viii) $k = 138^\circ$ (ix) $P = 58^\circ, M = 122^\circ, N = 122^\circ$
(x) $a = 158^\circ, b = 112^\circ$

مشق 7.2

- 1- (a) $(\angle 1, \angle 2), (\angle 3, \angle 4)$ (b) $(\angle 1, \angle 6), (\angle 3, \angle 8), (\angle 2, \angle 7), (\angle 5, \angle 4)$ (c) کوئی نہیں
(d) $(\angle 1, \angle 8), (\angle 1, \angle 4), (\angle 4, \angle 7), (\angle 7, \angle 8), (\angle 5, \angle 6), (\angle 5, \angle 2), (\angle 2, \angle 3), (\angle 3, \angle 6),$
(e) $(\angle 1, \angle 7), (\angle 4, \angle 8), (\angle 5, \angle 3), (\angle 2, \angle 6)$
2- (a) $(\angle 1, \angle n), (\angle m, \angle r)$ (b) $(\angle p, \angle n), (\angle m, \angle s), (\angle q, \angle r), (\angle 1, \angle t)$ (c) کوئی نہیں
(d) $(\angle p, \angle m), (\angle p, \angle v), (\angle v, \angle \ell), (\angle \ell, \angle m), (\angle n, \angle r), (\angle r, \angle t), (\angle 1, \angle s)$
(e) $(\angle p, \angle \ell), (\angle m, \angle q), (\angle n, \angle t), (\angle s, \angle r)$

مشق 7.3

- 1- جی ہاں ، جی ہاں ، جی ہاں 2- جی ہاں 3- جی ہاں 4- 10cm, 12cm, 14cm, 16cm, 18cm
5- 6cm, 12cm, 18cm, 6- 15cm, 21cm, 9cm, 12cm, 1:3
7- $AB \cong DE, AC \cong DF, BC \cong EF$ $\angle A \cong \angle D, \angle B \cong \angle E, \angle C \cong \angle F$ 8- جی نہیں 9- جی ہاں

مشق 7.4

- 1- (a) (i) $\overline{AB} \cong \overline{FD}$ (ii) $\overline{BC} \cong \overline{DE}$ (iii) $\overline{AC} \cong \overline{FE}$ (iv) $\angle A \cong \angle F$ (v) $\angle B \cong \angle D$ (vi) $\angle C \cong \angle E$
(b) $\angle R$ (c) $\overline{EF}$ (d) ض $\cong$ ض ض $\cong$ ض ض (e) ض $\cong$ ض ض
2- (i) $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ by ض ض ض $\cong$ ض ض ض (ii) $\triangle XYZ \cong \triangle DFE$ by ض ض ض $\cong$ ض ض ض
(iii) $\triangle ABC \cong \triangle CDA$, by ض ض ض $\cong$ ض ض ض (iv) $\triangle PQT \cong \triangle SRT$ by ض ض ض $\cong$ ض ض ض

جوابات

3- $\overline{AD} \cong \overline{DA}$, $\overline{DB} \cong \overline{AC}$, $\overline{AB} \cong \overline{DC}$, $\angle BAD \cong \angle CDA$, $\angle ADB \cong \angle DAC$, $\angle ABD \cong \angle DCA$,
 $m\angle ADB = 40^\circ$, $\text{ضربض} \cong \text{ضربض}$

4- (i) متساوی مثلثیں (ii) متساوی الاضلاع (iii) متساوی مثلثیں

5- $\overline{MN} \Leftrightarrow \overline{PQ}$, $\overline{NO} \Leftrightarrow \overline{QR}$, $\overline{PR} \Leftrightarrow \overline{MO}$, $\angle 1 \Leftrightarrow \angle 4$

مشق 7.5

(i) مستطیل (ii) مربع (iii) چوکور (iv) تنصیف (v) متماثل

مشق 7.6

(i) دائرہ (ii) رداس (iii) وتر (iv) قطر (v) نصف دائرہ
 (vi) قوس کبیرہ (vii) رداس (viii) دائروی قطعہ (ix) خط قاطع (x) قائمہ زاویہ

جائزہ مشق 7

I- درست جواب کے گرد دائرہ لگائیے۔

1- a 2- c 3- b 4- b 5- a 6- c 7- a 8- c 9- c 10- c

II- خالی جگہ پر کریں۔

1- متصل 2- سپریمٹری 3- منفرجہ 4- راسی 5- 180° 6- آپس میں
 7- متماثل 8- مختلف الاضلاع مثلث 9- قطر 10- قائمہ

جائزہ مشق 8

I- درست جواب کے گرد دائرہ لگائیے۔

1- c 2- c 3- c 4- c 5- a 6- a 7- a 8- c 9- c 10- a

II- خالی جگہ پر کریں۔

1- ہم نقطہ 2- ہم نقطہ 3- ہم نقطہ 4- ہم نقطہ 5- ارتفاع
 6- وسطانیہ 7- زاویہ کا نصف 8- تین 9- تین 10- تین

مشق 9.1

1- (i) 5 (ii) 12 (iii) $4\sqrt{231}$ 3- $\sqrt{2}l$ 4- $8\sqrt{2}$

5- (i) قائمہ الزاویہ مثلث (ii) غیر قائمہ الزاویہ Δ (iii) قائمہ الزاویہ Δ 6- 15 سینٹی میٹر 7- 7 سینٹی میٹر 8- 8 سینٹی میٹر 9- $25\sqrt{2}$

جوابات

مشق 9.2

- 1- 20 پتھر 2- 24000 پتھر 3- 223 روپے 4- 645.50 میٹر 5- 1 منٹ 54 سیکنڈ
6- 98 cm^2 7- (i) 8967 cm^2 (ii) 16.8 m^2 8- 9000 m^2 9- $16\sqrt{100} \text{ cm}^2$
10- (i) 44 cm^2 (ii) 0.5 m^2 (iii) 401.14 mm^2 11- 154 m^2 12- $16\sqrt{3} \text{ m}^2$ 13- $9\sqrt{3} \text{ cm}^2$
14- 210 cm^2 15- 7cm, 21cm 16- 1666.67cm 17- 72cm 18- 3600 cm^2 19- 4cm

مشق 9.3

- 1- 64 cm^3 2- 64 cm^3 3- 24 m^3 4- 502.86 cm^3 5- 94.3 cm^3 6- 113.1 cm^3
7- 127.3 cm^3 8- 339.4 cm^3

جائزہ مشق 9

I- درست جواب کے گرد دائرہ لگائیے۔

- 1- a 2- c 3- c 4- a 5- d 6- c 7- a 8- c 9- c

II- خالی جگہ پر کریں۔

- 1- مسئلہ فیثاغورث 2- رقبہ 3- $\frac{1}{2} \times \text{قاعدہ} \times \text{ارتفاع}$ 4- $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
5- $\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$ 6- $l \times b$ 7- πr^2 8- l^3 9- $l \times b \times h$ 10- $\frac{1}{3} \pi r^2 h$

مشق 10.1

- 1- (i) $\overrightarrow{OX}$ (ii) $\overrightarrow{OY}$ (iii) رقبہ II میں (iv) رقبہ I میں (v) $\overrightarrow{OX}$
(vi) رقبہ III میں (vii) رقبہ IV میں (viii) رقبہ II میں (ix) $\overrightarrow{OY}$ (x) رقبہ IV میں

- 2- (i) $2\sqrt{10}$ (ii) $\sqrt{17}$ (iii) $\sqrt{106}$ (iv) $(a-b)\sqrt{2}$ 3- $x + y - 10 = 0$
5- (10,0)

جائزہ مشق 10

I- درست جواب کے گرد دائرہ لگائیے۔

- 1- a 2- c 3- a 4- b 5- a 6- c 7- c 8- a 9- b 10- b

II- خالی جگہ پر کریں۔

- 1- فاصلے کا کلیہ 2- منفرد 3- منفرد 4- ہم خط 5- غیر ہم خط
6- رقبہ 7- (0,0) 8- صفر 9- حقیقی 10- مثبت

فرہنگ (تشریحات)

یونٹ 1: الجبری کلیے اور استعمالات:

کلیہ: جہاں کہیں ہمیں کوئی قیمت نکالنا مقصود ہوتی ہے ہم اس کے لیے قاعدہ کو کلیہ کی شکل میں لکھتے ہیں۔

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$$

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$$

$$(a + b + c)^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac)$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3ab(a \pm b) \pm b^3$$

$$(x \pm y)(x^2 \mp xy + y^2) = (x^3 \pm y^3)$$

مقادیر اہم: مقادیر اہم ایک غیر ناطق عدد ہوتا ہے۔

مقادیر اہم اصل: ایسی مقادیر اہم جس میں جذری رقم کا عددی سر '1' ہو، اصل مقادیر اہم کہلاتا ہے۔

مخلوط مقادیر اہم: ایسی مقادیر اہم جس میں '1' کے علاوہ کوئی ناطق جز و ضربی ہو اور دوسرا جز و ضربی غیر ناطق عدد ہو۔

مماثل مقادیر اہم: ایسی مقادیر اہم جن میں یکساں غیر ناطق عدد جز و ضربی ہوں، مماثل یا یکساں مقادیر اہم کہلاتی ہیں۔

غیر مماثل مقادیر اہم: ایسی مقادیر اہم جن میں غیر ناطق عدد مشترک جز و ضربی نہ ہو۔

جز و ناطق ساز: جب دو مقادیر اہم کا حاصل ضرب ایک ناطق عدد ہو تو ان میں سے ہر ایک دوسرے کا جز و ناطق ساز کہلاتا ہے۔

یونٹ 2: اجزائے ضربی:

یک درجہ کثیر رقمی: ایسی کثیر رقمی جس کا درجہ '1' ہوتا ہے یک درجہ کثیر رقمی کہلاتی ہے۔

دو درجہ کثیر رقمی: ایسی کثیر رقمی جس کا درجہ '2' ہوتا ہے، دو درجہ کثیر رقمی کہلاتی ہے۔

سہ درجہ کثیر رقمی: ایسی کثیر رقمی جس کا درجہ '3' ہو، سہ درجہ کثیر رقمی کہلاتی ہے۔

اجزائے ضربی کی اقسام: $kx + ky + kz$, $ax + ay + bx + by$, $a^2 \pm 2ab + b^2$

$$a^2 - b^2, (a^2 \pm 2ab + b^2) - c^2, a^4 + a^2b^2 + b^4 \text{ or } a^4 + b^4,$$

$$x^2 + px + q, ax^2 + bx + c,$$

$$a^3 + 3a^2bx + 3ab^2 + b^3, a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,$$

$$a^3 \pm b^3.$$

مسئلہ باقی: اگر کسی کثیر رقمی $P(x)$ جس کا درجہ '1' یا '2' بڑا ہو، کو کثیر رقمی $x-a$ سے تقسیم کیا جائے جبکہ 'a' کوئی مستقل ہو تو

باقی جو پچھتا ہے $P(a)$ کے برابر ہوتا ہے۔

مسئلہ جز و ضربی: ایک کثیر رقمی $P(x)$ کو $x-a$ پر تقسیم کیا جائے اور $P(a) = 0$ تو $P(x)$ کا جز و ضربی ہوگا۔

یونٹ 3: الجبرا کا استعمال:

H.C.F: دو الجبری جملوں کا عظیم $H.C.F$ ایک ایسا جملہ ہوتا ہے۔ جو ان جملوں کو بغیر باقی کے پورا پورا تقسیم کرتا ہے۔

L.C.M: دو یا دو سے زیادہ الجبری جملوں کا مشترک ذواضعاف اقل ایک چھوٹے سے چھوٹا ایسا جملہ ہوتا ہے جو ان تمام جملوں سے بغیر

باقی کے پورا پورا تقسیم ہو جاتا ہے۔

یونٹ 4: ایک درجی مساوات اور غیر مساوات:

ایک درجی مساوات: $ax + b = 0, a \neq 0$ کی شکل کی مساوات جس میں a اور b کوئی مستقلات ہیں اور x ایک متغیر ہے۔ ایک متغیر میں ایک درجی مساوات کہلاتی ہے۔

ایک درجی مساوات کا حل: متغیر کی ایسی قیمت جو مساوات پر پورا اترتی ہے ایک درجی مساوات کا حل کہلاتی ہے۔
مطلق قیمت: کسی حقیقی عدد x کی مطلق قیمت کو $|x|$ لکھا جاتا ہے۔

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{if } x > 0 \\ 0, & \text{if } x = 0 \\ -x, & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

ایک درجی غیر مساوات: دو ایک درجی الجبری جملوں کو علامات $>, <, \leq, \geq$ سے ملانے سے حاصل شدہ تعلق ایک درجی غیر مساوات کہلاتا ہے۔

خاصیت ثلاثی: اگر $x, y \in R$ ہو تو $x < y$ یا $x = y$ یا $x > y$

خاصیت متعدیت: اگر $x, y, z \in R$ ہوں تو $x > y$ اور $y > z$ تو $x > z$

جمعیت خاصیت: اگر $a, b, c, d \in R$ ہو اور $a > b$ تو $a + b > b + c$

اور $c < d$ تو $a + c < a + d$

ضربیت خاصیت: اگر $a, b, c, d \in R$ ہو اور $a > b$ اور $c > d$ تو $ac > bd$ اور $a < b$ اور $c < d$ تو $ac < bd$

یونٹ 5: دو درجی مساوات:

دو درجی مساوات: ایک متغیر میں دو درجی مساوات کو $ax^2 + bx + c = 0$ کی شکل میں لکھا جاتا ہے جبکہ $a \neq 0$ یہاں x ایک متغیر ہے اور a, b, c حقیقی اعداد ہیں۔

دو درجی مساوات کا حل: ہم دو درجی مساوات کو (i) تجزی سے (ii) تکمیل مربع سے حل کر سکتے ہیں۔

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

یونٹ 6: قالب اور مقطع:

قالب: کسی قاعدہ اور قانون کے تحت اعداد کی مستطیل شکل میں دی گئی دو بریکٹوں میں ترتیب قالب کہلاتی ہے۔

قالب کا درجہ: قطاروں اور کالموں کی تعداد کسی قالب کے درجہ کا تعین کرتی ہے۔

کالمی قالب: ایسا قالب جس میں صرف ایک کالم ہو کالمی قالب کہلاتا ہے۔

مربعی قالب: مربعی قالب میں قطاروں کی تعداد کالموں کی تعداد کے برابر ہوتی ہے۔

مستطیلی قالب: ایسا قالب جس میں کالموں کی تعداد قطاروں کے برابر نہ ہو۔

صفری قالب: اگر کسی قالب میں تمام ارکان صفر ہوں تو وہ صفری قالب کہلاتا ہے۔

اکائی یا وحدانی قالب: وحدانی قالب میں وتر کے تمام ارکان '1' اور وتر کے علاوہ باقی تمام ارکان صفر ہوتے ہیں۔

قالب کا ٹرانسپوز: قالب کی قطاروں کو کالموں کی شکل میں تبدیل کرنے سے جو قالب حاصل ہوتا ہے اصل قالب کا ٹرانسپوز کہلاتا ہے۔

متشاکل قالب: اگر کسی قالب A کا ٹرانسپوز A' ، قالب A کے برابر ہو تو قالب A متشاکل قالب کہلاتا ہے یعنی $A' = A$

عکسی متشاکل قالب: اگر کسی قالب A کے لیے $A' = -A$ ہو تو قالب A عکسی متشاکل قالب کہلاتا ہے۔

قالب کا مقطع: کسی مربعی قالب کی عددی قیمت قالب کا مقطع کہلاتی ہے۔

نادر قالب: اگر مربعی قالب کا مقطع صفر ہو تو قالب نادر قالب کہلاتا ہے۔ ورنہ غیر نادر قالب۔

2 بانئی 2 مربعی قالب کا ایڈجائنٹ: 2 بانئی 2 مربعی قالب کا ایڈجائنٹ قالب کے وتری ارکان کو آپس میں بدل کر اور غیر وتری ارکان کی علامت تبدیل کر کے حاصل کیا جاتا ہے۔

2 بانئی 2 مربعی قالب کا ضربی معکوس: کسی 2 بانئی 2 مربعی قالب کا ضربی معکوس قالب B ہوگا اگر $AB = BA = I$ جبکہ I ضربی ذاتی قالب ہے۔

یونٹ 7: جیومیٹری کے بنیادی تصورات:

زاویہ: زاویہ دو ایسی شعاعوں کا یونین ہوتا ہے جن کا نقطہ آغاز مشترک ہو۔

زاویہ قائمہ: زاویہ قائمہ کا درجہ 90° ہوتا ہے۔

زاویہ مستقیم: زاویہ مستقیم میں 180° ہوتے ہیں۔

حادہ زاویہ: حادہ زاویہ صفر درجہ سے زیادہ اور 90° سے کم ہوتا ہے۔

منفرجہ زاویہ: منفرجہ زاویہ 90° سے زیادہ اور 180° سے کم ہوتا ہے۔

زاویہ عکس: زاویہ عکس میں 180° سے زیادہ اور 360° سے کم ہوتا ہے۔

مساوی زاویے: ایسے زاویے جن کی مقدار یکساں ہو۔

متصل زاویے: ایسے دو زاویے جن کا مشترک راس اور ایک بازو مشترک ہو۔

کمپلیمنٹری زاویے: ایسے دو زاویے جن کا مجموعہ 90° ہو۔

سپلیمنٹری زاویے: ایسے دو زاویے جن کا مجموعہ 180° کے برابر ہو۔

راسی زاویے: دو متقاطع خطوط سے بننے والے ایسے زاویوں کے جوڑے جو غیر متصل ہوں اور ہر ایک کی مقدار زاویہ مستقیم سے کم ہو۔

نتائج:

- 1- مثلث کے زاویوں کا مجموعہ زاویہ 180° ہوتا ہے۔
- 2- اگر دو زاویے مساوی زاویوں کے کمپلیمنٹ کے برابر ہوں تو وہ آپس میں برابر ہوتے ہیں۔
- 3- اگر دو زاویے مساوی زاویوں کے سپلیمنٹ کے برابر ہوں تو وہ آپس میں بھی برابر ہوتے ہیں۔
- 4- اگر دو خطوط کسی تیسرے خط کے متوازی ہوں تو وہ آپس میں بھی متوازی ہوتے ہیں۔
- 5- اگر تین متوازی خطوط کسی خط پر مساوی قطعات قطع کریں تو وہ ہر دوسرے خط پر مساوی قطعات قطع کریں گے۔
- 6- اگر کوئی خط کسی مثلث کے ضلع کی تنصیف کرے اور دوسرے ضلع کے متوازی ہو تو وہ تیسرے ضلع کی بھی تنصیف کرے گا۔

- قاطع خط: ایک ایسا خط جو دو خطوط کو مختلف نقاط پر قطع کرے۔
- متماثل اشکال: دو ہندسی اشکال جو شکل اور جسامت میں یکساں ہوں متماثل اشکال کہلاتی ہیں۔
- کثیر الاضلاعی: تین یا تین سے زیادہ مختلف قطعات کی بند شکل کثیر الاضلاع کہلاتی ہے۔
- مساوی الاضلاع مثلث: ایسی مثلث جس کے تینوں اضلاع مساوی ہوں۔
- متساوی الساقین مثلث: ایسی مثلث جس کے دو اضلاع مساوی ہوں۔
- مختلف اضلاع مثلث: ایسی مثلث جس کے تینوں اضلاع کی لمبائیاں مختلف ہوں۔
- قائمہ الزاویہ مثلث: ایسی مثلث جس کا ایک زاویہ قائمہ ہو۔
- منفرجہ الزاویہ مثلث: ایسی مثلث جس کا ایک زاویہ منفرجہ ہو۔
- حادیہ الزاویہ مثلث: ایسی مثلث جس کے تینوں زاوے حاد ہوں۔
- دو مثلثان کے متماثل کی خصوصیات: (i) ض ض ض $\cong$ ض ض ض (ii) ض ض ض $\cong$ ض ض ض (iii) ض ض ض $\cong$ ض ض ض (iv) ض ض ض $\cong$ ض ض ض (v) ض ض ض $\cong$ ض ض ض
- چوڑ: ایسی کثیر الاضلاع جس کے چار اضلاع ہوں۔
- متوازی الاضلاع: ایسی چوکور جس کے دو مخالف اضلاع کے جوڑے متوازی ہوں۔
- مستطیل: ایسی متوازی الاضلاع جس میں ہر ایک زاویہ قائمہ ہو۔
- مربع: ایسی مستطیل جس کے چاروں اضلاع مساوی ہوں۔
- دائرہ: مستوی کے ایسے نقاط کا سیٹ جن کا ایک معین نقطہ سے فاصلہ برابر ہو، معین نقطہ دائرہ کا مرکز کہلاتا ہے۔
- رداس: دائرہ کے مرکز سے دائرہ کے کسی نقطہ تک کا فاصلہ رداس کہلاتا ہے۔
- قطر: دائرہ کا ایسا وتر جو مرکز میں سے گزرتا ہو قطر کہلاتا ہے۔
- قوس: دائرہ کا کچھ حصہ جس کے سرے کے نقاط اور ان کے درمیانی نقاط پر مشتمل ہو۔
- نصف دائرہ: قوس جو دائرہ کے نصف کے برابر ہو نصف دائرہ کہلاتا ہے۔
- قوس صغیرہ: قوس جو نصف دائرہ سے چھوٹی ہو قوس صغیرہ کہلاتی ہے۔
- قوس کبیرہ: قوس جو نصف دائرہ سے بڑی ہو قوس کبیرہ کہلاتی ہے۔
- متماثل دائرے: ایسے دائرے جن کے رداس یا قطر برابر ہوں متماثل دائرے کہلاتے ہیں۔
- خط قاطع: ایسا خط جو دائرے کو دو نقاط پر کاٹے خط قاطع کہلاتا ہے۔
- ماس: ایسا خط جو دائرے کے رداسی قطعہ کے بیرونی نقطہ پر عمود ہو۔
- سیکٹر: دائرے کا کچھ حصہ اور اس کے سروں کو مرکز سے ملانے والے رداسی قطعات کا درمیانی حصہ سیکٹر کہلاتا ہے۔
- ہم دائرہ نقاط: ایک ہی دائرہ کے محیط پر واقع نقاط۔
- ہم مرکز دائرے: ایسے تمام دائرے جن کا مرکز مشترک نقطہ ہو اور ان کے رداس مختلف ہوں۔
- مرکزی زاویہ: دو رداسی قطعات کے درمیان مرکز پر بننے والا زاویہ
- نتیجہ: (1) نصف دائرہ کا محور زاویہ قائمہ ہوتا ہے۔
- (2) ایک ہی قطعہ میں بننے والے زاویے مساوی ہوتے ہیں۔
- (3) ایک ہی قوس میں بننے والے زاویے مساوی ہوتے ہیں۔

یونٹ 8: عملی جیومیٹری:

- 1- کسی مثلث کے زاویہ کا ناصف کسی زاویے کی تنصیف کرنے والا خط ہوتا ہے
- 2- ہر مثلث کے تین زاویوں کے ناصف ہوتے ہیں
- 3- مثلث کا ارتفاع کسی راس سے مخالف ضلع پر عمود ہوتا ہے۔
- 4- ہر مثلث کے تین ارتفاع ہوتے ہیں، ہر راس سے ایک۔
- 5- ایک قطعہ خط جو مثلث کے کسی ضلع کی تنصیف کرے اور اس پر عمود بھی ہو تو وہ اس کا عمودی ناصف کہلاتا ہے۔
- 6- مثلث کے ہر ضلع کا ایک عمودی ناصف کے حساب سے تین عمودی ناصف ہوتے ہیں۔
- 7- وہ نقطہ جہاں پر مثلث کے تینوں زاویوں کے ناصف ملتے ہیں، مثلث کا مرکز محصور کہلاتا ہے۔
- 8- وہ نقطہ جہاں مثلث کے تینوں ارتفاع ملتے ہیں، مثلث کا مرکز عمود کہلاتا ہے۔
- 9- وہ نقطہ جہاں مثلث کے تینوں اضلاع کے عمودی ناصف ملتے ہیں مثلث کا مرکز محاصرہ کہلاتا ہے۔
- 10- دائرے کے ساتھ ہم مستوی خط جو دائرہ کو صرف ایک نقطہ پر قطع کرے دائرہ کا مماس کہلاتا ہے۔

یونٹ 9: رقبہ اور حجم:

- مسئلہ فیثاغورث: قائمہ الزاویہ مثلث کے وتر کا مربع باقی دونوں بازوؤں کے مربعوں کے مجموعہ کے برابر ہوتا ہے۔
- رقبہ: کسی بھی بند شکل کے درمیان گھری ہوئی سطح اُس کا رقبہ کہلاتی ہے۔

مثلث کا رقبہ: $A = \frac{1}{2} \times (\text{قاعدہ}) \times (\text{ارتفاع})$

مثلث کا رقبہ: $A = \sqrt{S(s-a)(s-b)(s-c)}$ جہاں $S = \frac{a+b+c}{2}$ مثلث کے اضلاع کی لمبائیاں ہیں۔

مساوی الاضلاع مثلث کا رقبہ: $A = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$ جبکہ 'a' مثلث کے ہر ضلع کی لمبائی ہے۔

مستطیل کا رقبہ: چوڑائی $\times$ لمبائی

مربع کا رقبہ: ضلع $\times$ ضلع

متوازی الاضلاع کا رقبہ: ارتفاع $\times$ قاعدہ

دائرے کا رقبہ: $A = \pi \times (\text{رداس})^2$

دائرہ کا محیط: $A = 2 \times \pi \times (\text{رداس})$

نصف دائرہ کا رقبہ: $A = \frac{1}{2} (\pi r^2)$

دوہم مرکز دائروں کے درمیان رقبہ: $A = \pi [r_1^2 - r_2^2]$

بیرونی دائرہ کا رداس r_1 اندرونی دائرہ کا رداس r_2

جہ: تین پہلو والی شکل کی چار دیواریوں میں گہری ہوئی خلا اس شکل کا حجم کہلاتی ہے۔

مکعب کا حجم: $V = l^3$ جبکہ l مکعب کے ہر ایک کنارے کی لمبائی ہے۔

مکعب نما کا حجم: $V = l \times b \times h$ جبکہ $b =$ چوڑائی $l =$ لمبائی اور $h =$ اونچائی

عمودی دائروں سلنڈر کا حجم: $V = \pi r^2 h$ جبکہ $h =$ سلنڈر کی اونچائی اور $r =$ قاعدہ کا رداس

عمودی دائروں مخروط کا حجم: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ جبکہ $h =$ مخروط کی اونچائی اور $r =$ قاعدہ کا رداس

کرے کا حجم: $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ جبکہ $r =$ کرے کا رداس

نصف کرے کا حجم: $V = \frac{2}{3} \pi r^3$ جبکہ $r =$ کرے کا رداس

یونٹ 10: محدود جیومیٹری کا تعارف:

دونوں نقطوں کے درمیان فاصلہ کا کلیہ: $d = |PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

1- عددی مستوی میں ایک نقطہ کو ایک اور صرف ایک عدد جوڑا سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

2- اعداد کا ہر جوڑا عددی مستوی کے ایک اور صرف ایک نقطہ سے جوڑا جاسکتا ہے۔

ہم خط نقاط: ایک ہی خط پر واقع نقاط ہم خط نقاط کہلاتے ہیں۔

غیر ہم خط نقاط: ایسے نقاط جو ایک ہی خط پر نہ واقع ہوں، غیر ہم خط نقاط کہلاتے ہیں۔

علامات

علامت	جس کے لیے ہے	علامت	جس کے لیے ہے
<	سے چھوٹا ہے	$\therefore$	چونکہ اسی طرح
>	سے بڑا ہے	$\therefore$	لہذا/پس
$\leq$	سے چھوٹا ہے یا برابر ہے	:	نسبت
$\geq$	سے بڑا ہے یا برابر ہے	$\therefore$	کے متناسب ہے
=	برابر ہے	∞	لامحدود/بے شمار
$\neq$	برابر نہیں ہے		نقطہ کا نشان
$\subset$	سے چھوٹا نہیں ہے	Σ	مجموعہ
$\supset$	سے بڑا نہیں ہے	$\overline{AB}$	قطر خط AB
$\in$	کا رکن ہے	$\overrightarrow{AB}$	شعاع AB
$\forall$	تمام چیزوں کے لیے	$\overleftrightarrow{AB}$	خط AB
$\sqrt{\quad}$	جذر	$\angle$	زاویہ
$ x $	x کی مطلق قیمت	$\triangle$	مثلث
$\Rightarrow$	اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ	$\sim$	کے مشابہ
$\Leftrightarrow$	صرف اور صرف	$\equiv$	متناسق
$\wedge$	اور	$\approx$	کے تقریباً برابر ہے
$\cup$	یو نیون یا اتصال	$\parallel$	کے متوازی ہے
$\vee$	یا	$\widehat{AB}$	قوس AB
$\cap$	اتصال یا تقاطع	$\leftrightarrow$	مطابقت میں

Center	مرکز	206
Central Angle	مرکزی زاویہ	212
Chord	وتر	207
Circle	دائرہ	206
Collinear And Non-collinear Points	ہم خط اور غیر ہم خط نقاط	281
Collinear Points	ہم خط نقاط	281
Collinearity Of Three Points	تین نقاط کا ہم خط ہونا	282
Column Matrix	کالمی قالب	133
Commutative Law	خاصیت مبادلہ	141
Complementary Angles	مکمل سازی زاویے	179
Concentric Circles	ہم مرکز دائرے	209
Congruent And Similar Figures	متشابه اور متشابه اشکال	193
Congruent Figures	متشابه اشکال	193
Congruent Triangles	متشابه مثلثات	198
Conjugate Binomial Surds	دو درجی متضاد ریاضی کے زوج	27
Construction	بناوٹ	222
Construction Of Quadrilaterals	چوکور کی بناوٹ	230
Construction Of Triangle	مثلث کی بناوٹ	222
Cramer's Rule	کریمر کا قانون	167
Cube	مکعب	264
Cube And Cuboid	مکعب اور مکعب نما	264
Cubic Polynomials	تین درجی کثیر رقمیاں	36
Cuboid	مکعب نما	265

D

Derivation Of Quadratic Formula	دو درجی کلیہ اخذ کرنا	115
Determinant Function	مقطع فنکشن	156
Diagonal Matrix	وتری قالب	134
Diagonals Of A Rectangle Bisect Each Other	مستطیل کے وتر ایک دوسرے کی نصف کرتے ہیں	204
Diagonals Of A Square Bisect Each Other	مربع کے وتر ایک دوسرے کی نصف کرتے ہیں	203
Diameter	قطر	207
Direct Common Tangent Or External Tangent	راست مشترک مماس یا بیرونی مماس	235
Distance Between Two Points	دو نقاط کے درمیان فاصلہ	278
Distance Formula	فاصلہ کا کلیہ	276
Distributive Laws	کلیہ تقسیمی	149
Division Of A Rational Expression	ناظر جملوں کی تقسیم	9
Drawing Tangents	مماس کھینچنا	239
Drawing Tangents To Two Equal Circles	دو مساوی دائروں کے رداس کھینچنا	235
Drawing Tangents To Two Un-equal Circles	دو غیر مساوی دائروں کے مماس کھینچنا	237

E

Equal Angles	مساوی زاویے	178
Equal Circles	مساوی دائرے	208
Equations Involving Absolute Value	مطلق قیمت والی مساوات	97
Equations Involving Radicals	جذر والی مساوات	93
Evaluate Determinant Of A Matrix	قالب کا مقطع کی قیمت نکالنا	156
Examine A Given Algebraic Expression	الجبری جملے کا مشاہدہ کرنا	4

A

Area Of Concentric Circles	ہم مرکز دائروں کے درمیان کا رقبہ	261
Absolute Value	مطلق قیمت	97
Acute Angle	حادہ زاویہ	177
Add And Subtract Matrices	قالبوں کو جمع اور تفریق کرنا	138
Addition And Subtraction Of Matrices	قالبوں کی جمع اور تفریق	138
Addition And Subtraction Of Surds	مقادیر ریاضی کی جمع اور تفریق	23
Addition Of Matrices	قالبوں کی جمع	138
Additive Identity Of Matrices	قالبوں کا جمعی ذاتی عنصر	142
Additive Inverse Of A Matrix	قالب کا جمعی معکوس	143
Adjacent Angles	متصل زاویے	178
Adjacent, complementary and supplementary angles	متصل مکمل سازی اور ملحق سازی زاویے	178
Adjoint Of A Matrix	قالب کا ایڈجوائٹ	157
Algebraic Expressions	الجبری جملے	2
Algebraic Manipulation	الجبری حسابات	57
Altitudes Of A Triangle	مثلث کے ارتفاع	225
Angle	زاویہ	176
Angle Bisectors Of A Triangle	مثلث کے زاویوں کے نامف	224
Angle In A Semi-circle Is A Right Angle	نصف دائرہ کا زاویہ قائمہ ہوتا ہے	210
Angle In The Same Segment Are Equal	ایک قطعہ میں زاویے مساوی ہوتے ہیں	211
Applications	اطلاق	213
Arc	قوس	208
Area Of A Circle	دائرہ کا رقبہ	260
Area Of A Parallelogram When Base And Altitude	متوازی الاضلاع کا رقبہ جبکہ اس کا قاعدہ اور ارتفاع معلوم ہو	255
Area Of A Semicircle	نصف دائرہ کا رقبہ	260
Area Of A Triangle When All The	مثلث کا رقبہ جبکہ اس کے تینوں اضلاع معلوم ہوں	252
Three Sides Are Given	مساوی الاضلاع مثلث کا رقبہ جبکہ اس کا ضلع معلوم ہو	254
Area Of An Equilateral Triangle When	کمرہ کی چار دیواری کا رقبہ	256
Its Side Is Given	رقبہ	251
Area Of Four Walls Of A Room	رقبہ اور حجم	247
Areas	مسطبی اور مربعی علاقوں کے رقبے	257
Areas And Volumes	خاصیت تلازم	141
Associative Law	قالبوں کی ضرب کے لحاظ سے خاصیت تلازم	147
Associative Law Of Matrices With Respect To Multiplication		

B

Basic Operations On The Algebraic Fractions	الجبری کسروں پر بنیادی عوامل	71
---	------------------------------	----

C

Calculate Unknown Angles	نامعلوم زاویہ معلوم کرنا	182
Calculate Unknown Angles Of A Triangle	مثلث کا نامعلوم زاویہ معلوم کرنا	184

Minor Arc	قوس صغیرہ	208
Mixed Surds	مخلوط مقامی برہم	22
Multiplication And Division Of The Algebraic Fractions	الجبری کسور کی ضرب اور تقسیم	72
Multiplication And Division Of Two Surds	دو مقامی برہم کی ضرب اور تقسیم	23
Multiplication Of Matrices	ماتریس کی ضرب	145
Multiplicative Inverse	ضرب الی	158
Multiplicative Inverse Of A Matrix	ماتریس کا ضرب الی	156

N

Non-singular Matrix	غیر تارر ماتریس	157
---------------------	-----------------	-----

O

Obtuse Angle	منفرج زاویہ	177
Opposite Sides Of A Rectangle Are Equal	مستطیل کے مخالف اضلاع مساوی ہوتے ہیں	203
Order Of A Matrix	ماتریس کا مرتبہ	130

P

Parallel Lines	متوازی خطوط	187
Parallelogram	متوازی الاضلاع	231
Perpendicular Bisectors Of The Sides Of A Triangle	مثلث کے اضلاع کے عمودی نصف	227
Problems Involving Quadratic Equations	دو درجی مساوات پر مبنی سوالات	121
Proper Rational Expression	واجب باطنی جملہ	3
Properties Of A Parallelogram	متوازی الاضلاع کی خصوصیات	205
Properties Of Angles	زاویوں کے خواص	210
Properties Of Congruency	تماثل کے خواص	202
Properties Of Congruency Between Two Triangles	دو مثلثوں کے تماثل کی شرائط	198
Properties Of Inequalities	غیر مساواتوں کے خواص	99
Properties Of Parallel Lines	متوازی خطوط کے خواص	187
Pure Surds	مطل مقامی برہم	22
Pythagoras Theorem	مسطیقی ثابوت	248

Q

Quadratic Equations	دو درجی مساوات	108
Quadratic Polynomials	دو درجی کثیر رقمیاں	36
Quadrilaterals	چوکور	202

R

Radius	رداس	206
Rational Expression	باطنی جملہ	2

F

Factorization	تجزی	35
Factorization Of Expressions	بطنی کی تجزی کرنا	36
Factorizing A Cubic Polynomial	تین درجی کثیر رقمی کی تجزی کرنا	52
Finding Remainder Without Dividing	بغیر تقسیم کیے باقی معلوم کرنا	49
Formulae	کلیے	13
Four Angles Of A Rectangle Are Right Angles	مستطیل کے چاروں زاویے قائم ہوتے ہیں	204
Four Angles Of A Square Are Right Angles	مربع کے چاروں زاویے قائم ہوتے ہیں	203
Four Sides Of A Square Are Equal	مربع کے چاروں ضلع مساوی ہوتے ہیں	202
Fundamentals Of Geometry	جیومیٹری کے بنیادی تصورات	175

H

H.C.F By Division	تقسیم کے قاعدہ سے عاظم HCF معلوم کرنا	61
H.C.F By Factorization Method	بذریعہ تجزی HCF عاظم معلوم کرنا	58
Hemispheres	نصف کرہ	268
Highest Common Factor (HCF) And Least Common Multiple (LCM)	عاظم HCF اور ذواضعاف اقل LCM	58

I

Improper Rational Expression	غیر واجب باطنی جملہ	3
Inequalities ($>$, $<$) And ($>=$, $<=$)	غیر مساواتیں	98
Introduction To Coordinate Geometry	معدوی جیومیٹری کا تعارف	275
Inverse Of A Non-singular Matrix	غیر تارر ماتریس کا معکوس	160
Irrational Numbers	غیر باطنی اعداد	21

L

L.C.M. By Factorization	بذریعہ تجزی ذواضعاف اقل LCM	64
Laws Of Addition Of Matrices	ماتریس کی جمع کا قانون	141
Laws Of Radicals	رڈیکل کا قانون	22
Least Common Multiple (L.C.M)	ذواضعاف اقل LCM	64
Linear Equation In One Variable	ایک متغیر میں یک درجی مساوات	86
Linear Equations	یک درجی مساوات	86
Linear Inequalities	یک درجی غیر مساوات	98
Linear Polynomials	یک درجی کثیر رقمیاں	36

M

Major Arc	قوس کبیرہ	208
Matrices And Determinants	ماتریس اور متعین	127
Matrix Equality	ماتریس کی برابری	131
Matrix Inversion Method	ماتریس کے معکوس کا طریقہ	165
Medians Of A Triangle	مثلث کے وسطانیے	228

Surds	مقادیر اہم	21
Surds of Radicals	چند والے مقادیر اہم	21
Surds Of Second Order	دوسرے مرتبہ کے مقادیر اہم	23
Symbol	علامت	196
Symmetric Matrix	متشاکل قالب	135

T

Tangent	مماس	209
Tangent To A Circle	دائرے کا مماس	233
Tangent To Two Un-equal Intersecting Circles	غیر مساوی متقاطع دائروں پر مماس	240
Tangent To Two Un-equal Touching Circles	دو غیر مساوی مس کرتے ہوئے دائروں پر مماس	239
The Area Of A Rectangle When Its Two Sides Are Given	ایسی مستطیل کا رقبہ جس کے دونوں اضلاع دیے گئے ہیں	255
The Area Of A Triangle	مثلث کا رقبہ	252
The Area Of A Triangle When Base And Altitude Is Given	ایسی مثلث کا رقبہ معلوم کرنا جس کا قاعدہ اور ارتفاع معلوم ہوں	253
The Factor Theorem	مسئلہ تجزیہ	50
The Quadratic Formula	دو درجہ کی کلیہ	115
The Remainder Theorem	مسئلہ باقی	48
The Sphere	کرہ	267
To Draw Angle-bisectors Of A Triangle	مثلث کے زاویوں کے نامف کھینچنا	224
Transitive	متعدیت	100
Transpose Of A Matrix	قالب کا ٹرانسپوز	135
Transverse Common Tangent Or Internal Tangent	معمول مشترکہ مماس یا اندرونی مماس	236
Trichotomy	علامتی خاصیت	99
Types Of Matrices	قالب کی اقسام	133

U

Unit Matrix Or Identity Matrix	اکائی قالب یا ضربی ذاتی قالب	134
Use Of Distance Formula	فاصلہ کے کلیہ کا استعمال	283
Transverse	قاطع خط	191

V

Value Of An Algebraic Expression	الجبری متشاکلی قیمت	10
Vertical Angles	راہی زاویے	181
Volume	حجم	264
Volume Of Right Circular Cylinder	عمودی دائرونی سلنڈر کا حجم	266

Z

Zero Or Null Matrix	صفری قالب	134
Zeros Of Polynomial	کثیر درجہ کی صفر	50

Rational Expression In Its Lowest Terms	مختصر ترین تاقل جملہ	4
Rational Numbers	تاقل اعداد	21
Rationalization	تاقل بنانا	27
Rationalizing Factor	تاقل بنانے والا جزو ضربی	27
Rationalizing Of Surds	مقادیر اہم کو تاقل بنانا	28
Rationalizing The Denominator	مخرج کو تاقل بنانا	24
Real Numbers	حقیقی اعداد	21
Rectangle	مستطیل	230
Rectangular Matrix	مستطیلی قالب	133
Reduce A Rational Expression To Its Lowest Terms	تاقل جملہ کو اس کی مختصر ترین حالت میں لکھنا	5
Reflex Angle	زاویہ ٹکس	177
Relation Between The Pairs of angles	زاویوں کے جوڑوں میں تعلق	191
Remainder Theorem And Factor Theorem	مسئلہ باقی اور مسئلہ جزو ضربی	47
Right Angle	قائمہ زاویہ	177
Right Circular Cone	عمودی دائرونی مخروط	266
Row Matrix	قطاری قالب	133

S

Scalar Matrix	سکیلر قالب	134
Secant Line	دائرے کا خط قاطع	209
Sector	دائرے کا سیکٹر	209
Semi Circle	نصف دائرہ	208
Similar Figures	متشاکل اشکال	195
Similar Surds	ہم شکل مقادیر اہم	23
Singular And Non-singular Matrices	نا در اور غیر نا در قالب	157
Singular Matrix	نا در قالب	157
Skew-symmetric Matrix	ٹکس متشاکل قالب	136
Solution Of A Linear Equation	یک درجہ مساوات کا حل	87
Solution Of A Quadratic Equation	دو درجہ مساوات کا حل	108
Solution Of A Quadratic Equation By Completing The Square Method	مکمل رقع سے دو درجہ مساوات کا حل	110
Solution Of A Quadratic Equation By Factorization	دو درجہ مساوات کا حل بذریعہ تجزیہ	108
Solution Of Simultaneous Linear Equations	یک درجہ ہمزاد مساواتوں کا حل	165
Solving Linear Inequalities	یک درجہ غیر مساوات حل کرنا	101
Square	مربع	231
Square Matrix	مربع قالب	133
Square Root By Division Method	چند بذریعہ طریقت تقسیم	79
Square Root By Factorization Method	چند بذریعہ طریقت تجزیہ	75
Square Root Of Algebraic Expression	الجبری جملوں کا چند	75
Straight Angle	زاویہ مستقیم	176
Subtraction Of Matrices	قالبوں کی تفریق	138
Sum, Difference And Product Of Rational Expressions	تاقل جملوں کی جمع تفریق اور ضرب	6
Supplementary Angles	مکمل زاویہ	179

مصنفین کا تعارف

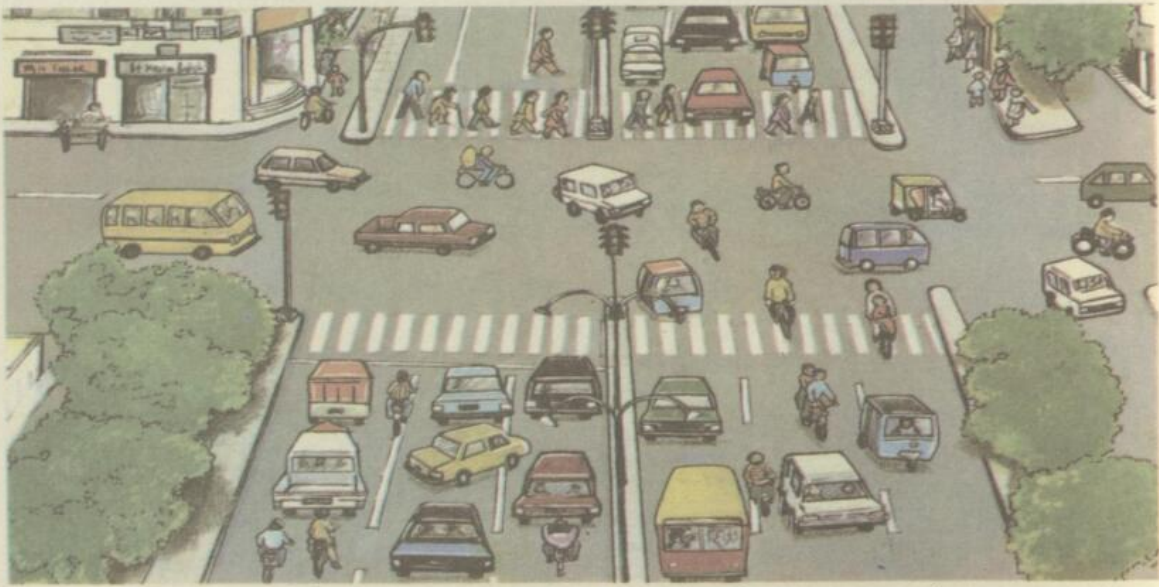
ڈاکٹر محمد عزیز احمد چیئر مین شعبہ ریاضی یونیورسٹی آف انجینئرنگ اینڈ ٹیکنالوجی (یو۔ ای۔ ٹی) لاہور اس کتاب کے مصنف ہیں۔ آپ نے پی۔ ایچ۔ ڈی یونیورسٹی آف ویسٹرن آئسٹور یو کینیڈا سے مکمل کی۔ کالج میں 4 سالہ تدریسی تجربہ رکھنے کے علاوہ 30 سال کا یونیورسٹی میں بھی تجربہ رکھتے ہیں۔ آپ نے ٹیچنگ اسٹنٹ کے طور پر یونیورسٹی آف ویسٹرن آئسٹور یو کینیڈا میں پڑھایا۔ آپ پنجاب ریاضی سوسائٹی کے صدر رہے اور ریاضی کے قومی اور بین الاقوامی سیمینارز میں شرکت کر چکے ہیں۔

آپ نے 1980 میں یو۔ ای۔ ٹی میں بطور لیکچرار تعینات ہونے سے پہلے گورنمنٹ کالج گڑی دوپٹہ آزاد کشمیر اور تعلیمات عالیہ گریڈ کالج راولپنڈی میں پڑھایا اور آپ یو۔ ای۔ ٹی میں بطور اسٹنٹ پروفیسر ریاضی خدمات سرانجام دیتے رہے۔ اب آپ چیئر مین شعبہ ریاضی یو۔ ای۔ ٹی لاہور اپنے فرائض منصبی سرانجام دے رہے ہیں۔

محترم جناب مقصود رضا احمد جو کہ ریاضی کے ایسوسی ایٹ پروفیسر ہیں۔ انہوں نے ایم ایس سی ریاضی کی ڈگری پنجاب یونیورسٹی لاہور سے حاصل کی۔ آپ کو گورنمنٹ کالج لاہور میں پہلی پوزیشن حاصل کرنے پر رول آف آنرز کا ایوارڈ دیا گیا۔ 1979ء میں آپ نے یونیورسٹی آف بلوچستان کوئٹہ کے شعبہ ریاضی میں بحیثیت لیکچرر ملازمت اختیار کی۔ آپ تقریباً ایک سال ایم ایس سی کی کلاسز کو پڑھاتے رہے۔ پنجاب پبلک سروس کمیشن کی طرف سے سلیکشن ہونے پر 1980ء میں آپ کالج کیڈری میں مقرر ہوئے۔ 1982ء میں آپ کو بلغاریہ کے لیے پوسٹ گریجویٹ سکالرشپ دیا گیا۔ 1990ء میں آپ کو ”کامن ویلتھ سکالرشپ فار پوسٹ گریجویٹ سٹڈیز“ کے لیے نامزد کیا گیا۔ 1994ء میں آپ کو یونیورسٹی آف انجینئرنگ اینڈ ٹیکنالوجی لاہور کی طرف سے ایم فل کی ڈگری دی گئی۔ تصنیف و تالیف کے شعبہ میں بھی آپ کی خدمات قابل قدر ہیں۔ پرائمری، مڈل، سینڈری اور انٹرمیڈیٹ کے لیول کی 20 سے زیادہ کتابیں آپ لکھ چکے ہیں۔ آپ اس وقت گورنمنٹ شالیمار ڈگری کالج باغبانپورہ میں تدریسی خدمات انجام دے رہے ہیں۔



بس سٹینڈ بس رکنے پر، بس میں سوار مسافروں کو پہلے اترنے دیں۔ پھر لائن میں بس پر سوار ہوں۔



ساتھیوں اور والدین کی مدد سے اُن آٹھ جگہوں کی نشاندہی کریں جہاں ٹریفک قوانین کی خلاف ورزی ہو رہی ہے۔

عرض ناشر

یہ کتاب قومی نصاب ۲۰۰۶ء اور نیشنل ٹیکسٹ بک اینڈ لرننگ میٹریلز پالیسی ۲۰۰۷ء کے تحت بین الاقوامی معیار پر تیار کی گئی ہے۔
یہ کتاب حکومت پنجاب کی طرف سے تمام سرکاری سکولوں میں بطور واحد ٹیکسٹ بک مہیا کی گئی ہے۔ اگر اس کتاب میں کوئی
تصور وضاحت طلب ہو یا متفن اور املا وغیرہ میں کوئی غلطی ہو تو اس بارے میں ادارے کو آگاہ کریں۔ ادارہ آپ کا شکر گزار ہوگا۔

قومی ترانہ

پاک سرزمین شاد باد کشورِ حسین شاد باد
تُو نشانِ عزمِ عالی شان ارضِ پاکستان
مرکزِ یقین شاد باد
پاک سرزمین کا نظام قوتِ اخوتِ عوام
قومِ ملکِ سلطنت پائندہ تابندہ باد
شاد باد منزلِ مُراد
پرچمِ ستارہ و ہلال رہبرِ ترقی و کمال
ترجمانِ ماضی شانِ حال جانِ استقبال
سایہٴ خدائے ذوالجلال

Item No. U-3

نشر: علمی برادران

G/1-2 پنجاب پلازہ چھٹی منڈی اردو بازار لاہور

فون: 042-37242233 فیکس: 042-37361207

ویب سائٹ: www.alibrotheran.com

ای میل: info@alibrotheran.com



ISBN 978-969-9719-01-3



9 789699 719011